propos d'un théorème sur le triangle.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1904)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

CORRESPONDANCE

A propos d'un théorème sur le triangle.

Le théorème de M. Kariya publié dans notre numéro de mars, qui nous a déjà valu d'intéressantes remarques publiées en mai, vient de nous en procurer encore d'autres que nous publions ci-après, du moins quant à ce qu'elles contiennent de nouveau.

IV. — M. Pierre Faure (Paris) d'une part, et M. Houssais (Roanne) d'autre part, nous envoient une démonstration analogue

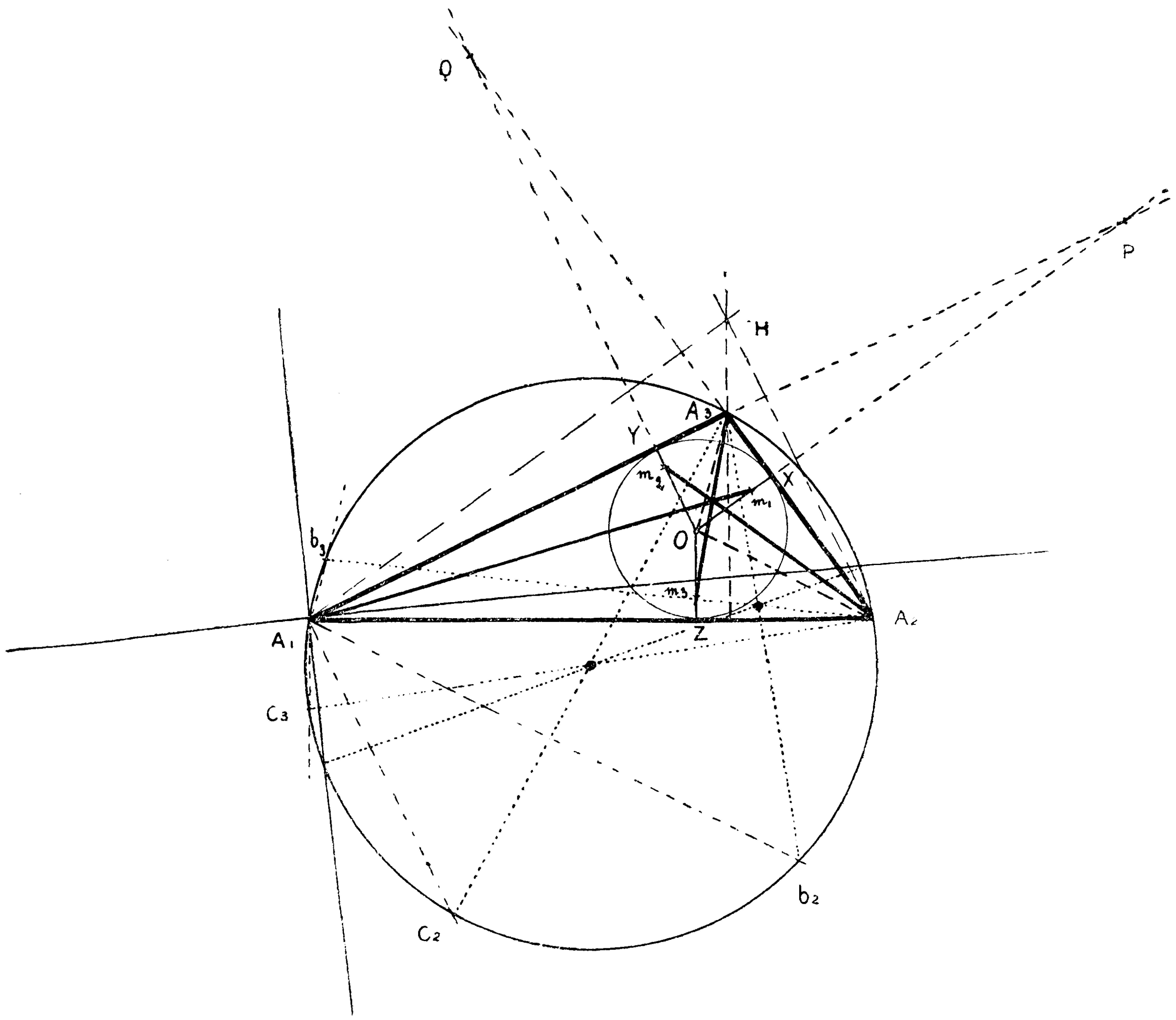

Fig. 1.

à celle de MM. Cantoni et Demoulin, publiée page 236, mais ils étudient de plus la conique Γ qu'ils montrent être une hyperbole équilatère, résultat signalé aussi par M. Cantoni. M. Faure ajoute une construction de cette courbe que nous reproduisons. Pour les notations, on comparera la nouvelle figure avec celle de la page 236.

Cherchons la direction des asymptotes de cette conique Γ ; pour cela, traçons un cercle passant par A_1, par exemple le cercle circonscrit au triangle $A_1 A_2 A_3$, et menons par A_1 des parallèles à trois couples de rayons homologues des faisceaux $(A_2\ m_2)$ et $(A_3\ m_3)$; les rayons doubles des deux faisceaux de sommet A_1 ainsi formés, seront parallèles aux asymptotes cherchées.

Choisissons pour déterminer les deux faisceaux, les trois couples suivants :

$A_1 A_2$ et son homologue $A_1 A_3$;

$A_1 b_2$ et $A_1 b_3$ parallèles aux bissectrices intérieures du triangle en A_2 et A_3 ;

$A_1 c_2$ et $A_1 c_3$ parallèles aux hauteurs du triangle relatives aux sommets A_2 et A_3.

Pour obtenir les rayons doubles, il suffit de joindre le point A_1 aux points d'intersection du cercle et de la droite qui joint les points de concours de $A_2 b_3$ avec $A_3 b_2$ et de $A_2 c_3$ avec $A_3 c_2$.

Les angles $c_3 A_1 A_2$ et $c_2 A_1 A_3$ étant droits par construction, les droites $A_2 c_3$ et $A_3 c_2$ se coupent au centre du cercle, et la droite qui détermine les rayons doubles passe aussi par ce centre. Donc, les parallèles aux asymptotes sont rectangulaires entre elles ; par suite, la conique, lieu du " point de Kariya " est une hyperbole équilatère passant par les points $A_1 A_2 A_3$ O.

Il est facile de construire le centre de cette hyperbole : c'est le point commun aux quatre cercles des neuf points qui correspondent aux quatre triangles formés par les points $A_1 A_2 A_3$ O pris trois à trois.

P. Faure (Paris).

V. — M. G. Franke nous écrit :

M. E. Jahnke a bien voulu fixer mon attention sur la note que M. Kariya a publiée dans l'*Enseignement mathématique*.

En l'étudiant, j'ai trouvé d'abord qu'on peut remplacer sans aucune difficulté dans le calcul du mathématicien japonais le centre du cercle inscrit par les centres des cercles ex-inscrits [1] pour trouver trois autres points de Kariya.

Ces recherches m'ont fait établir un nouveau point remarquable du triangle.

Tandis que le point de M. Kariya est lié au centre du cercle

[1] Cette remarque relative aux cercles ex-inscrits nous a été également signalée par M. Houssais.

inscrit, j'ai obtenu le nouveau point en partant du cercle circonscrit, et ce qui me paraît intéressant, c'est que ce point est situé sur la droite d'Euler.

Soit M le centre du cercle circonscrit au triangle $A_1 A_2 A_3$, soient MD_1, MD_2, MD_3 les perpendiculaires abaissées de M sur les côtés de ce triangle. Prenons sur ces droites trois points M_1, M_2, M_3 tels que

$$\frac{MM_1}{MD_1} = \frac{MM_2}{MD_2} = \frac{MM_3}{MD_3} = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

Je vais démontrer que les trois transversales $A_1 M_1$, $A_2 M_2$ et $A_3 M_3$ se coupent en un point P situé sur la droite d'Euler.

En effet, supposons d'abord que les trois transversales ne coupent pas HM en un seul point P, mais en trois points P_1, P_2, P_3.

On aurait

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{P_1 M}{P_1 H} &= \frac{MM_1}{A_1 H}, \\ \frac{P_2 M}{P_2 H} &= \frac{MM_2}{A_2 H}, \\ \frac{P_3 M}{P_3 H} &= \frac{MM_3}{A_3 H}. \end{aligned} \right.$$

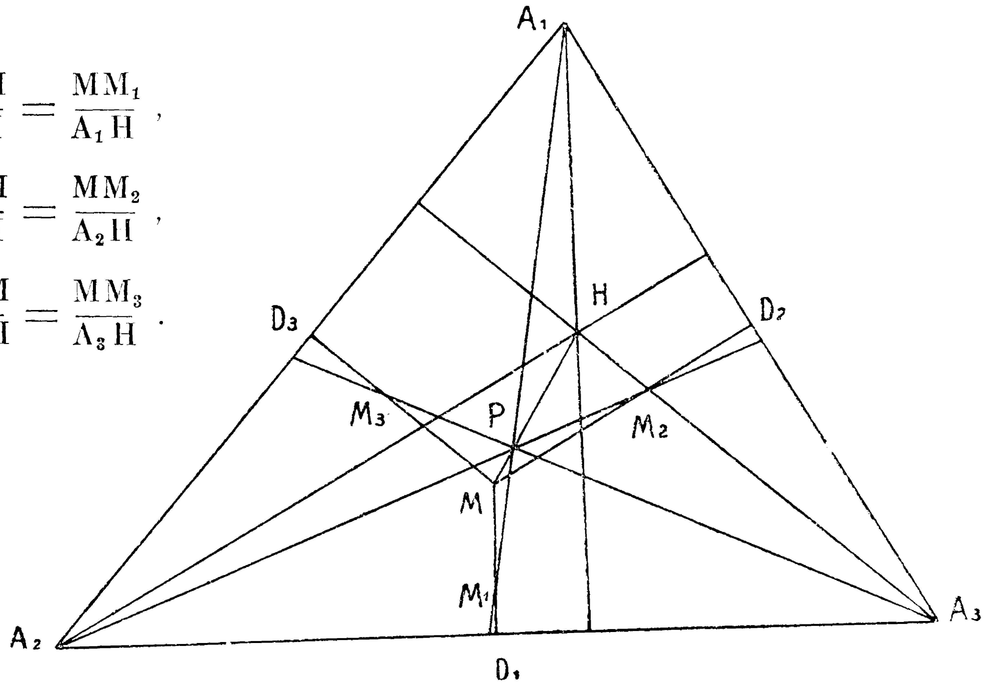

Fig. 3.

D'autre part, d'après un théorème élémentaire, on sait que

$$A_1 H = 2MD_1 \; ; \; A_2 H = 2MD_2 \; ; \; A_3 H = 2MD_3.$$

En combinant avec (1) on trouve

$$\frac{MM_1}{A_1 H} = \frac{MM_2}{A_2 H} = \frac{MM_3}{A_3 H}.$$

C'est pourquoi il suit de (2)

$$\frac{P_1 M}{P_1 H} = \frac{P_2 M}{P_2 H} = \frac{P_3 M}{P_3 H}.$$

Aussi les trois points P_1, P_2, P_3 tombent-ils en un seul point P.

On voit immédiatement que le point P est situé sur la droite HM de telle sorte que

$$\frac{PM}{PH} = \frac{MM_1}{A_1H} = \frac{MM_1}{2MD_1} = \frac{m}{2n} .$$

Donc, le lieu géométrique du point P, m, n étant variables, est la droite d'Euler, et le point P divise le segment d'Euler joignant le centre M du cercle circonscrit avec l'orthocentre H, dans le rapport $m : 2n$.

G. Franke (Berlin).

VI. — D'autre part M. Cantoni nous écrit :

Permettez-moi d'ajouter encore un mot relatif au théorème de M. Kariya. D'après M. Barbarin (*Enseign. math.*, p. 232), le théo-

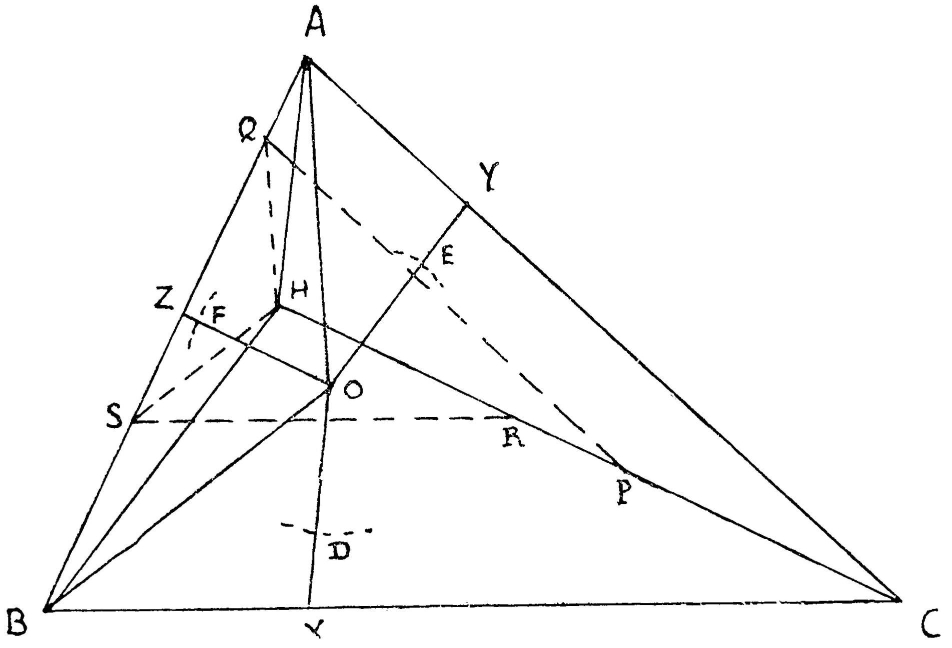

Fig. 3.

rème en question n'est pas nouveau, mais a déjà été énoncé au Congrès de Carthage. Toutefois il existe une différence entre les propositions énoncées par M. Barbarin et celle de M. Kariya. En effet, j'observe que cette dernière proposition peut être regardée comme un cas particulier d'une proposition plus générale n'ayant pas de lien étroit avec celles de M. Barbarin.

Soit H, un point quelconque du plan du triangle ABC ; je joins H aux trois sommets A, B, C, et je fais HP = HB, HR = HA. Je mène PQ parallèle à AC et RS parallèle à CB. Soit O le point de rencontre des deux droites menées par A et par B et respectivement parallèles à QH et SH. Si par O, je mène les droites OX, OY, OZ respectivement parallèles à HA, HB, HC et si je prends sur ces droites les points D, E, F également distants de O, les trois droites AD, BE et CF concourent en un même point.

La démonstration est identique à celle indiquée dans le cas particulier où H est le point de concours des hauteurs du triangle.

Il est évident que dans ce cas général, les droites AF et AE, BD et BF, CE et CD *ne seront pas* des couples de droites isogonales.

E. CANTONI (Viadana, Mantova).

VII. — M. CANTONI, ayant reçu les épreuves de ce qui précède, en a tiré encore quelques réflexions que nous résumons comme suit :

a) Relativement à la note de M. Faure, on peut observer que la direction des asymptotes de l'hyperbole Γ peut s'obtenir encore plus simplement. Soit O le centre du cercle inscrit au triangle $A_1A_2A_3$, M le centre du cercle circonscrit, et tirons par O et M un diamètre PQ.

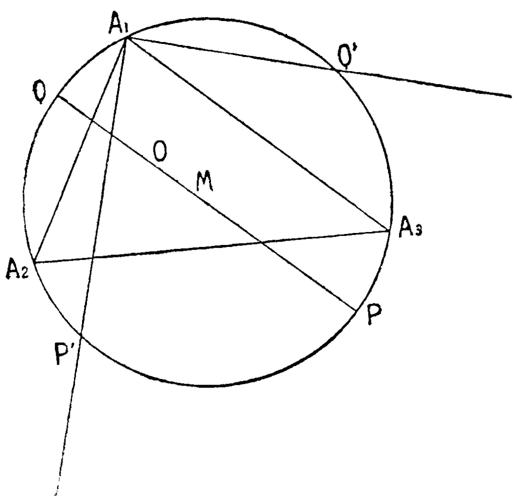

Fig. 4.

Prenons maintenant sur le cercle circonscrit des arcs

$$A_2P' = A_3P \ , \qquad A_3Q' = A_2Q \ ,$$

A_1P' et A_1Q' sont les directions cherchées.

L'hyperbole Γ est une transformée arguésienne du diamètre PQ.

b) Quant au théorème de M. Franke, il peut se démontrer de même que celui de M. Kariya. Reprenons la figure accompagnant le texte de M. Franke et les notations de celui-ci. Quand le rapport $m:n$ varie sur les droites MD_2, MD_3, les droites tirées de A_2 et A_3 aux points M_2 et M_3 engendrent des faisceaux projectifs. Le lieu des points tels que P est alors en général une conique qui, bien entendu, peut dégénérer. Or, ici nous connaissons manifestement trois points du lieu, car le centre M du cercle circonscrit au triangle, le barycentre et l'orthocentre de ce dernier correspondent respectivement aux valeurs 0, ∞, 1 du rapport $m:n$. D'après le théorème d'Euler, ces trois points sont sur une même droite qui est le lieu déterminé finalement par M. Franke.

Et encore toutes ces considérations peuvent-elles rentrer dans quelque chose de plus général.

Considérons le triangle $A_1A_2A_3$, les médianes dont les pieds seront $D_1D_2D_3$. Les triangles $A_1A_2A_3$, $D_1D_2D_3$ ont même barycentre G. Prenons un point quelconque H dans $A_1A_2A_3$ et tirons HG, qui coupe A_2A_3 en P et D_2D_3 en Q. Menons par $D_1D_2D_3$ des droites respectivement parallèles à A_1H, A_2H, A_3H ; elles se coupent en un point M disposé dans $D_1D_2D_3$ comme H dans $A_1A_2A_3$, si bien que H, G, M sont évidemment en ligne droite. Si maintenant l'on prend des points M_1, M_2, M_3 (non marqués sur la figure) respectivement sur MD_1, MD_2, MD_3, de telle sorte que

$$\frac{MM_1}{D_1M_1} = \frac{MM_2}{D_2M_2} = \frac{MM_3}{D_3M_3} ,$$

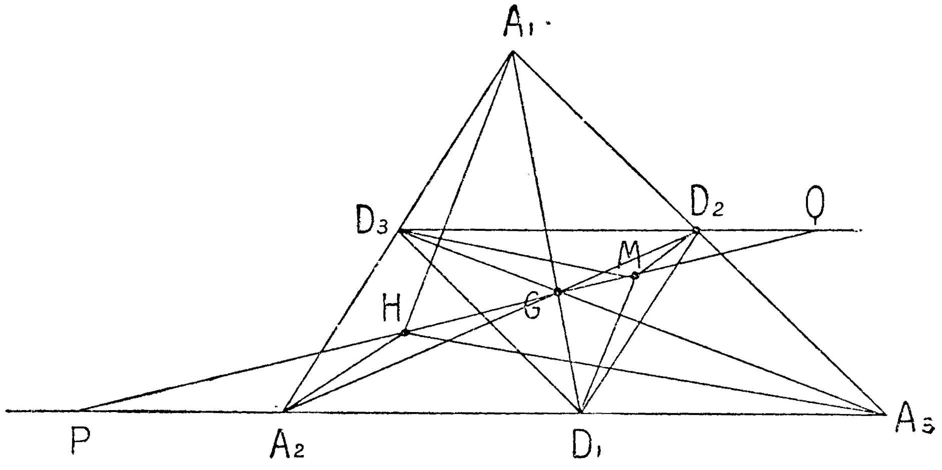

Fig. 5.

les trois transversales A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3 auront toujours un point de concours situé sur HGM.

Si H devient l'orthocentre, M devient le centre du cercle circonscrit.

E. Cantoni (Viadana, Mantova).