Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 6 (1904)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES POINTS DE DIVERGENCE D'UNE SÉRIE
Autor: Popovici, C.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-7575

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR LES POINTS DE DIVERGENCE D'UNE SÉRIE

Il arrive souvent qu'une fonction soit continue en un point autour duquel son développement en série est divergent.

P. ex. : Les fonctions $L(1 + x)$ et $\frac{1}{1 + x}$ peuvent être représentées par les séries :

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \text{ et } 1 - x + x^2 - \ldots$$

dans un cercle de rayon égal à l'unité. La première série est convergente même sur le cercle mais non la seconde.

Eh bien ! Dans ce cas en considérant nos fonctions comme des intégrales d'une équation différentielle, on peut les développer en séries de polynomes valables dans tout le plan, sauf les rayons suivant lesquels ces intégrales sont discontinues. (Mittag-Leffler.)

P. ex. La fonction : $y = \frac{1}{1 + x}$ est l'intégrale de l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$ qui pour $x = 0$ se réduit à $y = 1$. Alors la fonction $y = \frac{1}{1 + x}$ est développable en série de polynomes dans tout le plan sauf le rayon $x = -1 \ldots -\infty$ et l'on obtient cette série en calculant par des approximations successives l'intégrale de $\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$ qui se réduit pour $x = 0$ à $y = 1$.

La question est bien claire pour le développement en série de polynomes ; quant au développement en série entière il se présente une anomalie telle que celle-ci :

Dans l'égalité

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots,$$

le premier membre prend la valeur $\frac{1}{2}$ et le deuxième 1 ou 0, pour $x = 1$.

Alors on dit simplement que la série n'est pas uniformément convergente. Cela ne suffit pas.

Je vais expliquer que cette anomalie n'est qu'une apparence, et que toujours les deux membres sont égaux, tant que $|x|$ ne surpasse 1.

Je vais montrer en outre que l'ambiguité pour la série :

$$1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n$$
$$n = \infty$$

de prendre pour $x = 1$ soit la valeur 1 soit la valeur 0 n'est pas si simple et que cette série peut vraiment prendre telle valeur que l'on voudra, même $\frac{1}{2}$.

En effet. Nous avons l'identité

$$\frac{1}{1+x} - (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x} = 1 - x + x^2 \ldots + (-1)^n x^n.$$

Prenons $x = 1 - \frac{u}{n}$. La fonction u peut être une fonction très générale de n assujettie seulement à la condition :

$$\lim_{n=\infty} \frac{u}{n} = 0.$$

Nous avons :

$$\frac{1}{2 - \frac{u}{n}} \left[1 - (-1)^{n+1} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^{n+1}\right] = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n ;$$

$$x = 1 - \frac{u}{n}.$$

Or si $\frac{u}{n}$ tend vers zéro, $\left(1 - \frac{u}{n}\right)^{n+1}$ tend vers e^{-u}.

Donc

$$S = \lim \left[1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n\right] = \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^n e^{-u}\right].$$

$$\text{Si } n \text{ est pair on a :} \quad S_1 = \frac{1}{2}\left[1 + e^{-u}\right],$$

$$\text{Si } n \text{ est impair on a :} \quad S_2 = \frac{1}{2}\left[1 - e^{-u}\right].$$

Si $\lim u = \infty$, on a $S_1 = S_2 = \frac{1}{2}$, ce qui arrive p. ex. si $u = \sqrt{n}$ ou $u = \mathrm{L}n$.

Remarque géométrique. — Si l'on considère :

$$y = \frac{1}{1+x} \; ; \; y = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n$$

comme deux fonctions distinctes, elles représentent *deux courbes qui ont un arc commun* compris entre $x = 1 + \varepsilon$ et $x = -1 + \varepsilon$, ε étant une quantité si petite que l'on veut, mais finie.

C. Popovici (Paris).

LIMITE ASSIGNÉE ET LIMITE ASSIGNABLE

Il semble que, pour certains mathématiciens, dire d'un nombre qu'il peut être supérieur ou inférieur à *toute* limite *assignée,* c'est dire équivalemment que ce nombre peut être supérieur ou inférieur à *toute* limite *assignable.*

Il y a là une équivoque que l'on peut aisément dissiper en observant tout d'abord que le nombre des nombres *assignés*, variable tant qu'on voudra mais toujours *fini,* ne peut jamais épuiser le nombre des nombres *assignables* qui est infini. D'où cette double conséquence :

1° Il existe toujours un nombre *fini* supérieur à *tout* nombre *assigné,* tandis qu'il n'existe pas de nombre *fini* supérieur à *tout* nombre *assignable,* ou, ce qui revient au même, il n'y a que l'infini qui soit supérieur à *tout* nombre *assignable.*

2° Il existe toujours un nombre *non nul* inférieur à *tout*