Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 6 (1904)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES SÉRIES
Autor: Baire, René
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-7555

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR LA THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES SÉRIES

Il est permis de penser que la théorie élémentaire des séries, telle qu'elle est enseignée dans les cours de mathématiques spéciales, présente, peut-être par la force des choses, un caractère artificiel et disparate. L'exposé de cette théorie consiste surtout à passer en revue un certain nombre de caractères de convergence ou de divergence, sans qu'aucun lien logique apparaisse entre ces différents énoncés. L'élève à qui on a remis ces outils entre les mains, une fois en présence d'une application à traiter, en est réduit à les essayer tour à tour, à peu près au hasard ; il est assez remarquable même que les caractères qui réussissent le moins souvent, comme la règle de d'Alembert, sont justement ceux que les élèves sont le plus portés à employer.

Je me propose de montrer, dans les considérations qui suivent, comment on peut, sans sortir du terrain élémentaire, diriger l'application de la théorie d'une manière plus raisonnée et éviter, dans bien des cas, des tâtonnements inutiles.

Je supposerai qu'il s'agit de séries à termes positifs, et je m'occuperai surtout des caractères de *convergence*.

Remarquons tout d'abord que l'étude d'un caractère de convergence et de divergence consiste le plus souvent en ceci : on forme une certaine fonction du rang n, soit $f(n)$, on cherche ce que devient cette fonction quand n croît indéfiniment ; si elle satisfait à certaines conditions d'inégalité, on en déduit la convergence ou la divergence, la démonstration se faisant par comparaison avec une certaine série ; de sorte qu'en dernière analyse, si un caractère de convergence réussit pour la série (u), c'est parce qu'il permet de définir une

série (v), telle qu'on a $u_n < v_n$ pour n assez grand, ce que nous exprimerons en disant que (u) *décroît plus vite que* (v). Ainsi la règle de d'Alembert $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} < k < 1\right)$ emploie comme série de comparaison une progression géométrique décroissante, la règle $n^\mu u_n (\mu > 1)$ emploie la série $\frac{1}{n^\mu}$, etc...

Cela étant, considérons les séries de comparaison les plus employées, et *comparons-les entre elles*. Soit, par exemple, les deux séries : $\alpha_n = Ak^n (k < 1)$ et $\beta_n = \frac{B}{n^\mu} (\mu > 1)$. On reconnaît que $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ tend vers 0, car $k^n \times n^\mu$, si $k < 1$, tend vers 0.

C'est là un fait bien connu, qui s'exprime, comme on sait, en disant que la progression géométrique décroît plus vite que la série $\frac{1}{n^\mu}$. Mais il est utile d'en déduire les conséquences suivantes :

Si (u) décroît plus vite que (α), elle décroît à fortiori plus vite que (β) ; mais il peut exister des séries décroissant plus vite que (β) sans décroître plus vite que (α). Par suite, au point de vue de la recherche de la convergence, *la comparaison avec* (β) *est plus avantageuse qu'avec* (α), car toutes les fois que la comparaison avec (α) s'applique, il en est de même de la comparaison avec (β), sans que la réciproque soit vraie. On peut de la même manière comparer entre elles les différentes séries $\frac{1}{n^\mu}$ quand μ varie, les séries $\frac{1}{n(\mathrm{L}\mu)^\mu}$ etc.

Un résultat très simple, mais très frappant, se déduit de ce qui précède. Si la règle de d'Alembert $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} < k < 1\right)$ ou celle de Cauchy $(\sqrt[n]{u_n} < k < 1)$ s'applique à une série, *la règle* $n^2 u_n$ (ou, plus généralement, $n^\mu u_n$, quel que soit $\mu > 1$), *s'y applique aussi*. En effet, d'après l'hypothèse, on peut démontrer qu'on a : $u_n < Ak^n$; il en résulte que $n^\mu u_n$

tend vers 0. Il est bien entendu que pour l'instant nous faisons abstraction des difficultés que peut présenter la constatation de ces différents faits pour l'exemple qui sera donné. Il s'agit en quelque sorte d'un fait considéré intrinséquement, d'une comparaison *in abstracto*.

Voici maintenant un second point. Certains caractères de convergence emploient la même série de comparaison, comme $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\sqrt[n]{u_n}$; quel est celui des deux qui réussira le plus souvent ? On démontre généralement dans les cours que si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite, $\sqrt[n]{u_n}$ a la même limite. Mais on peut obtenir des résultats plus complets ; on peut donner, en effet, le théorème suivant.

Soit une série (u). Si, parmi toutes les progressions géométriques décroissantes, il en existe une, soit (v), telle que (u) décroît plus vite que (v), $\sqrt[n]{u_n}$ reste inférieur, pour n assez grand, à un nombre plus petit que 1. En effet, d'après l'hypothèse, il existe une série de terme général $v_n = Ak^n (k < 1)$, telle qu'on finit par avoir : $u_n < Ak^n$; on en déduit : $\sqrt[n]{u_n} < k\sqrt[n]{A}$; le second membre tend vers k, donc $\sqrt[n]{u_n}$ devient inférieur à un nombre $k' < 1$.

Ce résultat permet en quelque sorte de dire que *le caractère de Cauchy tire tout le parti possible de la comparaison avec les progressions géométriques.*

Une simple réflexion montre qu'il n'en est pas de même pour la règle de d'Alembert, qui introduit la fraction $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, (*en général plus compliquée que* u_n, de même que la dérivée d'une fonction est en général plus compliquée que la fonction, sauf quelques cas). Les quantités u_n peuvent, en effet, devenir infiniment petites, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ayant des valeurs très grandes pour certaines valeurs de n.

Les exemples étudiés dans ce qui précède suffisent pour montrer l'importance et l'utilité pratique de la comparaison des différents critères de convergence. On vérifiera de même que la règle de Duhamel, qui sert à compléter la règle de d'Alembert, introduit la comparaison avec une certaine série de la forme $\frac{1}{n^\mu}$, de sorte que si cette règle permet de démontrer la convergence d'une série (u), le caractère $n^\mu u_n$ s'applique aussi à la même série, pour une valeur convenable de μ.

Nous venons d'étudier les différents critères de convergence au point de vue de leur *puissance*, il faut maintenant nous placer à un autre point de vue, celui de leur *commodité*. Par exemple, nous avons fait voir que si, pour une série, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ reste inférieur à $k < 1$, $n^2 u_n$ tend vers 0 ; mais cela n'empêche pas que, dans certains exemples, il est plus facile de constater le premier fait que le second ; c'est pour ce motif qu'il peut y avoir malgré tout avantage à employer la règle de d'Alembert. Dans quels cas est-il logique d'essayer tel caractère plutôt que tel autre ? Nous pourrons donner une réponse à cette question à la condition de nous borner aux cas les plus usuels.

Tout d'abord un caractère de convergence aura des chances d'être d'autant plus commode que la fonction de n qu'il introduit sera plus simple. D'autre part, ce qu'on doit étudier en dernière analyse, c'est la rapidité avec laquelle u_n tend vers 0 ; pour cela, on met u_n sous forme d'un produit de facteurs, en faisant abstraction de ceux qui restent finis, et portant l'attention sur ceux qui sont infiniment petits. Cela posé, passons en revue les différentes manières dont n entre dans u_n dans les cas les plus fréquents.

1°. Un premier cas est celui où n n'entre qu'*algébriquement* dans u_n. (Comme cas plus particulier, u_n est fonction *rationnelle* de n). Dans ce cas, u_n est comparable à une expression de la forme An^μ, et l'application des règles relatives à $n^\mu u_n$

donne immédiatement la réponse à la question posée. L'essai de tout autre caractère doit être considéré comme une maladresse.

2°. n entre de la manière précédente, et en outre, en exposant. C'est le cas, par exemple, où il y a un facteur x^n. Ici, les fonctions $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\sqrt[n]{u_n}$ contiennent le facteur x, qui correspond à ce facteur x^n, et est *plus simple que lui* ; il y a des chances pour que ces caractères réussissent.

3°. n entre par des factorielles, par exemple par

$$\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1).$$

Ici, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est tout indiqué, parce que le facteur qui, dans $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, correspond à la factorielle, est la quantité très simple $(\alpha+n)$.

4°. n entre dans u_n par des facteurs irréguliers au point de vue de la variation quand n croît indéfiniment, par exemple par des fonctions trigonométriques telles que $\sin nx$; ici, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est à proscrire complètement. Il y a en général avantage, dans ce cas, à considérer d'abord la série obtenue en supprimant ces facteurs irréguliers ; par exemple, le moyen le plus court de montrer que la série $\frac{\sin^2 nx}{n!}$ est convergente sera de dire qu'on l'obtient en multipliant par des facteurs < 1 les termes de la série $\frac{1}{n!}$, dont on démontre la convergence par la règle de d'Alembert.

5°. n entre par $\mathrm{L}n$; la fonction $\mathrm{L}n$ croît moins vite qu'une puissance positive quelconque de n ; on se trouve dans des conditions moins avantageuses que dans le cas 1°, en ce qui concerne du moins le facteur logarithmique ; par suite, si les caractères $n^\mu u_n$ échouent, il n'y a pas d'autre

ressource que d'avoir recours aux séries $\frac{1}{n\mathrm{L}n}$, $\frac{1}{n(\mathrm{L}n)^{\mu}}$ $(\mu > 1)$ etc., qui, comme on sait, sont précisément les intermédiaires entre les séries $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^{\mu}}$ $(\mu > 1)$, au point de vue de la rapidité de la convergence ou de la divergence. Moins que jamais, on ne doit ici employer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Nous avons constaté, en résumé, que l'emploi de la règle de d'Alembert est utile dans deux cas, celui où n entre en exposant, et en factorielle. Il est bon de remarquer que c'est précisément le cas des séries qu'on obtient quand on développe en série de Maclaurin, les fonctions simples, $\mathrm{L}(1 + x)$, $(1 + x)^{\mu}$, etc. Mais il n'en est pas moins vrai qu'il s'agit là d'un fait qu'on doit considérer comme exceptionnel.

Il serait facile de compléter l'aperçu qui précède, en ce qui concerne, soit d'autres caractères de convergence, soit des caractères de divergence.

René Baire (Montpellier).