

IV GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1904)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

déduisent des axiomes PI et PII, pris au sens analytique. Ce second axiome est représenté dans le plan par le théorème de Desargues.

Il existe une infinité de familles de lignes satisfaisant à ces axiomes, qui fournissent chacune une interprétation des propositions de la Géométrie projective.

On sait, au moyen de chacune de ces familles, établir des systèmes de coordonnées, qui sont univoques lorsque les lignes considérées satisfont à l'axiome PIII.

IV

GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE

GROUPES MÉTRIQUES. — La Géométrie métrique met en œuvre, en plus des notions que nous avons déjà exposées, celle de déplacement sans déformation, base de l'idée de l'égalité des figures, dont l'étude est l'objet essentiel de cette Géométrie (la perpendicularité qui intervient dès les premières propositions est définie au moyen d'une égalité d'angles).

Sophus Lie a énoncé les propriétés fondamentales des déplacements sans déformation.

Nous choisirons, parmi les deux systèmes équivalents d'axiomes qu'il a donnés, celui dont l'interprétation géométrique est la plus directe. Mais nous entendons toutefois, suivant le principe constamment suivi dans cette étude, les employer dans leur signification analytique, signification toujours précise en vertu des axiomes AI et AII.

MI. — *Les déplacements sans déformation (Bewegungen) sont des transformations ponctuelles qui constituent un groupe réel et continu comprenant les inverses de toutes ses transformations.*

MII. — *Si l'on fixe un point quelconque, tous les points susceptibles d'être atteints par un autre point quelconque sont situés sur une surface contenant le second point et ne contenant pas le premier.*

III. — *Autour du point fixe il existe un domaine triplement étendu et de dimensions finies, dans lequel tout point peut atteindre, par un déplacement continu, tout autre point situé sur la surface correspondante, définie ci-dessus.*

Sophus Lie démontre que ce système d'axiomes, dont la signification analytique est bien déterminée, caractérise *les groupes continus de transformations projectives conservant chacun une quadrique, ordinaire ou dégénérée, et les groupes qui leur sont semblables*, c'est-à-dire qui peuvent être obtenus au moyen des premiers par l'application d'une transformation ponctuelle.

Nous appellerons *métriques* ces divers groupes.

Parmi les propriétés qui leur sont communes, nous signalerons, en premier lieu, la suivante :

Deux points étant fixes, un déplacement continu est encore possible, dans lequel restent fixes les divers points d'une ligne passant par les deux points.

Les lignes ainsi introduites, étant déterminées par la connaissance de deux de leurs points, forment une famille à quatre paramètres. Appelons-les *axes* du groupe métrique.

Dans le cas où le groupe métrique est *projectif*, c'est-à-dire est composé de transformations projectives, il est facile de voir que ses axes sont les lignes droites.

De la manière même dont les groupes métriques non projectifs sont obtenus, suivant le théorème de Sophus Lie, au moyen des groupes métriques projectifs, il résulte que les axes relatifs à chacun d'eux sont les lignes transformées des lignes droites au moyen d'une transformation ponctuelle.

Comme, d'autre part, les propriétés PI et PII des lignes droites sont évidemment de celles qui se conservent dans une transformation ponctuelle générale (toutes réserves étant faites toutefois au sujet de particularités pouvant être introduites par l'existence de singularités, de déterminations multiples, etc.), on peut énoncer le théorème suivant :

Les propriétés PI et PII des lignes droites appartiennent également aux axes de tout groupe métrique.

Etant donné une famille de lignes satisfaisant aux axiomes PI et PII, l'on pourra toujours déterminer, par le procédé

indiqué au paragraphe II, un système de coordonnées (unique ou non). Tout groupe métrique admettant ces lignes pour axes est représenté, dans ce système de coordonnées, par des équations qui, dans un système projectif de coordonnées, représentent un groupe métrique projectif, de sorte que : *à tout groupe projectif métrique correspond un groupe métrique admettant pour axes les lignes d'une famille donnée, satisfaisant aux axiomes PI et PII.*

Tout groupe métrique donne lieu à une interprétation de la théorie de la mesure, en entendant par « égalité de deux figures » leur superposabilité au moyen d'une transformation du groupe.

Les diverses notions qui interviennent dans la Géométrie ordinaire (sauf, pour le moment, les parallèles) trouvent place dans cette interprétation, et, en premier lieu, la *distance*, qui se présente comme un invariant, par rapport au groupe, d'un couple de points.

Parmi les propriétés communes aux groupes métriques, nous citerons la suivante :

Par une transformation du groupe, un point quelconque peut atteindre (transivité du groupe) tout point dont il n'est pas séparé par la surface invariante du groupe (dans les groupes projectifs : quadrique conservée ou plan de la conique conservée). Pour cette raison nous appellerons cette surface *l'infini métrique*.

La distance (définie par rapport au groupe considéré) d'un point de l'espace à un point de l'infini métrique est infinie.

Ecartant les groupes dans lesquels les transformations laissant un point fixe présentent des propriétés trop différentes de celles des rotations ordinaires autour d'un point, nous distinguerons trois catégories de groupes métriques :

Groupes *euclidiens*, transformés des groupes projectifs qui conservent une conique imaginaire située dans un plan réel ;

Groupes *riemanniens*, transformés des groupes projectifs qui conservent une quadrique imaginaire à équation réelle ;

Groupes *lobatchewskiens*, transformés des groupes projectifs qui conservent une quadrique réelle entourant la région

de l'espace à laquelle s'appliquent les propositions que nous avons en vue.

Rien ne s'oppose *a priori* à ce que l'on fasse toutes combinaisons entre les diverses hypothèses possibles sur la forme des axes, la catégorie du groupe et la position dans l'espace de l'infini métrique.

C'est ainsi que l'on peut établir des métriques non-euclidiennes sur le plan, en conservant leur rôle aux lignes droites et une métrique euclidienne sur la sphère, en faisant jouer le rôle des droites par les grands cercles ¹.

GROUPES MÉTRIQUES PROJECTIFS. — Nous avons vu que les groupes métriques projectifs sont ceux dont les axes sont les droites.

Comme les propriétés géométriques résultent exclusivement des axiomes, celles des groupes métriques projectifs s'étendent forcément à tous les groupes métriques dont les axes satisfont à l'axiome PIII, pourvu toutefois que, dans l'interprétation figurée des propositions, l'on remplace les lignes droites par les axes du groupe considéré.

Mais l'attribution de la projectivité aux groupes à étudier présente l'avantage de nous permettre l'emploi légitime des termes : plan, conique, quadrique, etc., qui simplifient le discours.

Nous allons signaler les principales divergences que présentent les trois catégories de groupes métriques projectifs.

1° Le groupe est lobatchewskien.

L'infini métrique est alors constitué par un ellipsoïde enveloppant la région de l'espace à laquelle s'appliquent les propositions.

Parmi les transformations du groupe se distinguent celles dans lesquelles tous les points d'une droite restent fixes : nous les appellerons *rotations*, par généralisation de la signification de ce terme.

Dans une rotation une autre droite reste également fixe, savoir la conjuguée de l'axe de rotation par rapport à la

¹ Cf. COMBEBIAC, *L'espace est-il euclidien? L'Enseignement mathématique*, Année 1903.

quadrique fondamentale, mais les points de cette dernière droite ne restent pas fixes, ils se déplacent sur elle, de sorte que celle-ci glisse sur elle-même.

On peut donc dire qu'à tout axe de rotation correspond un axe de glissement.

De deux droites conjuguées, l'une rencontre réellement l'infini métrique, l'autre non.

Toute transformation du groupe peut être obtenue par la succession de deux rotations effectuées respectivement autour de deux droites conjuguées, c'est-à-dire par la succession d'une rotation et d'un glissement effectués autour et le long d'une même droite.

Dans une rotation simple (qui est aussi un glissement simple), les plans passant par l'axe de glissement restent fixes, puisque chacun d'eux contient une droite fixe et un point fixe, savoir le point où il rencontre l'axe de rotation. En outre les points extérieurs à l'axe de glissement décrivent, dans les plans fixes, des coniques bitangentes à la quadrique fondamentale aux points où celle-ci est rencontrée par cet axe.

Par la répétition indéfinie d'une de ces transformations — rotation simple ou glissement simple, — les divers points de l'espace tendent vers l'un des points L de l'infini métrique communs à leurs trajectoires.

La translation lobatchewskienne d'un segment le long d'une droite ne permet pas la mesure de tous les segments de cette droite, puisque les points situés à l'extérieur de la quadrique fondamentale ne peuvent pas être atteints par le segment pris pour unité.

M. VERONÈSE¹ en conclut à l'existence de segments *déterminés* qui seraient infinis et à la nécessité d'introduire dans l'analyse mathématique l'idée de l'*infini actuel*.

Cette interprétation du mot « infini » en modifie complètement, à notre avis, la signification, laquelle est très précise et réside tout entière dans l'idée de la répétition indéfinie d'une opération déterminée.

¹ VERONÈSE. *Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen*, traduit de l'italien par A. Schepp; Teubner, Leipzig, 1894.

On se trouve d'ailleurs, dans le cas actuel, simplement en présence du fait très vulgaire qu'est l'existence d'une limite.

Un élément x (ici l'extrémité d'un segment sur une droite ou sa coordonnée) est déterminé par un nombre N d'opérations (ici la translation d'un segment pris pour unité).

Ce fait s'exprime en disant que x est fonction de N .

Quelle difficulté particulière trouve-t-on à concevoir que x tende vers une limite (point ou nombre) déterminée, lorsque le nombre entier N augmente indéfiniment? Toute existence de limite est réductible à un fait de cette espèce.

Dans le cas qui nous occupe, si l'on désigne par y la longueur lobatchewskienne du segment qui a pour coordonnée univoque x , l'on a

$$y = 2c \log \frac{2c - x}{2c + x},$$

fonction qui devient infinie pour les valeurs de la variable

$$x = \pm 2c.$$

2° Le groupe est riemannien.

L'infini métrique est une quadrique imaginaire à centre réel.

Deux droites conjuguées par rapport à cette quadrique ne se distinguent pas l'une de l'autre par leurs propriétés.

Les trajectoires dans une rotation (ou glissement) simple sont bitangentes à la quadrique fondamentale, mais en des points imaginaires.

Parmi les particularités qui distinguent ce groupe, nous signalerons que la translation d'un segment sur une droite, répétée un nombre fini de fois, fait atteindre l'infini, fait qui indique simplement l'impossibilité d'une telle répétition et qui, analytiquement, tient à ce que la fonction $2c \operatorname{arctang} \frac{x}{2c}$ tend vers une valeur finie, lorsque x croît indéfiniment.

3° Le groupe est euclidien.

La quadrique fondamentale est dégénérée en une conique imaginaire à plan réel.

La conjuguée d'une droite quelconque de l'espace est une droite de ce plan, de sorte que les rotations et les translations constituent des opérations se distinguant nettement les unes des autres.

Par une translation indéfiniment répétée, un point tend, comme par une translation lobatchewskienne, vers un point de l'infini métrique, mais si nous supposons rejeté à l'infini le plan de l'infini métrique, c'est-à-dire si nous supposons que l'équation de ce plan tende à être satisfaite par les coordonnées d'un point qui s'éloigne indéfiniment, l'on tombe sur la géométrie vulgaire.

PRINCIPE D'ARCHIMÈDE. — Sans toucher en rien à l'idée de figure, qui constitue en somme l'unique concept en dehors duquel le mot « Géométrie » perd toute signification, nous pouvons établir des « métriques » où interviennent toutes les notions auxquelles conduit l'étude de la mesure géométrique, mais où les opérations et les figures correspondantes aux propositions ne sont plus celles de la Géométrie vulgaire.

Il nous suffit, pour cela, de remplacer l'opération fondamentale de la Géométrie vulgaire qui consiste dans le « déplacement sans déformation » des figures par d'autres opérations ayant des propriétés soit identiques, soit peu différentes.

Dans chacune de ces métriques intervient une famille de lignes jouissant des propriétés attribuées aux lignes droites par les axiomes projectifs PI et PII, et chacune de ces familles peut être considérée comme la famille des axes d'une infinité de groupes métriques des trois catégories.

Nous avons vu, dans l'examen des groupes métriques projectifs, c'est-à-dire des groupes dont les axes sont les lignes droites, que, parmi eux, il n'existe pas de groupes lobatchewskiens ou riemanniens donnant lieu à la propriété ordinaire d'une translation en ce qui concerne sa répétition indéfinie.

Examinons donc, dans le cas général, les conséquences de l'admission d'un nouvel axiome, que nous énoncerons, sous le titre d'*Axiome d'Archimède*, de la manière suivante :

MIV. — *L'opération consistant à déplacer (sans déforma-*

tion) un segment sur un axe du groupe peut être continué indéfiniment et permet d'atteindre tout point de cet axe.

Cet axiome pourrait aussi s'exprimer en disant que l'addition métrique de deux segments sur un axe jouit de la propriété archimédienne, propriété qui résulte en somme du fait que cette addition donne toujours un résultat et un seul.

Une conséquence de l'axiome MIV consiste en ce qu'un point de l'espace peut atteindre tout autre point et par suite ne peut être séparé de lui par la surface de l'infini métrique, de sorte que cet infini métrique ne peut comprendre des points *déterminés* de l'espace.

Les conséquences principales de l'axiome MIV pour les trois catégories de groupes métriques, sont les suivantes :

1° Groupe euclidien : l'espace est une variété ouverte, l'équation du plan de l'infini métrique (ou plutôt de la surface qui joue ce rôle) est vérifiée à la limite par les coordonnées d'un point qui s'éloigne indéfiniment, les axes du groupe forment une famille de lignes ouvertes et présentant la propriété de l'unicité de l'asymptotique.

2° Groupe lobatchewskien : l'espace est encore une variété ouverte, la surface qui joue le rôle de la quadrique fondamentale est composée — pour ainsi parler — des points de l'infini, et les axes sont encore des lignes ouvertes, mais ne présentant pas la propriété de l'unicité de l'asymptotique.

3° Groupe riemannien : l'espace est une variété fermée, les axes sont des lignes fermées.

Nous voyons que l'axiome d'Archimède constitue le lien entre la catégorie des groupes métriques et la forme de leurs axes.

L'admission des quatre axiomes métriques et de l'axiome PIII caractérise les groupes euclidiens dont l'infini métrique est rejeté à l'infini. Si nous employons le pluriel, c'est qu'il existe une infinité de ces groupes, chacun correspondant à une famille d'axes possédant les propriétés attribuées aux lignes droites par les axiomes projectifs, y compris l'axiome PIII.

Parmi eux se trouve le groupe qui admet pour axes les droites idéales.

Les groupes lobatchewskiens satisfaisant à l'axiome d'Archimède ne sauraient avoir pour axes les droites idéales, et c'est à la signification multiple, — parce qu'arbitraire — qui a été donnée au mot « droite » que doivent être attribués en grande partie les malentendus auxquels a donné lieu l'introduction des géométries non-euclidiennes.

Quant aux groupes riemanniens, il ne peut en exister qui satisfassent à l'axiome d'Archimède que si l'espace est une variété fermée.

COORDONNÉES MÉTRIQUES. — Supposons que l'on établisse un système de coordonnées, à la manière des systèmes employés en géométrie analytique, au moyen de trois axes rectangulaires et des distances des points de l'espace à ces axes, les axes, la rectangularité, la distance constituant des notions relatives au groupe métrique choisi.

Un tel système de coordonnées sera dit *métrique*.

Il est facile de voir que, pour les groupes euclidiens et lobatchewskiens, l'axiome MIV équivaut au suivant :

(MIV)' *Les systèmes de coordonnées métriques sont univoques.*

Cet axiome ne peut être applicable aux groupes riemanniens que moyennant une extension de la signification du mot : « univoque ».

Sur une surface fermée, simplement connexe, on peut, en vue d'établir un système de coordonnées, tracer des lignes appartenant à deux familles différentes, telles que par tout point de la surface, il passe une ligne et une seule de chaque famille. On aura déterminé ainsi un système de coordonnées, qui ne saurait être univoque, puisque la surface est fermée, mais qui jouit des propriétés essentielles des systèmes univoques.

Ces considérations s'étendent aux variétés triples, de sorte que l'axiome (MIV)' peut être considéré comme équivalent, à l'axiome MIV pour les groupes métriques de toutes les catégories, à la condition d'étendre, comme nous venons de l'indiquer, la signification du mot « univoque ».

Nous sommes maintenant en mesure de préciser le motif de certaines divergences que présente la question des géométries non-euclidiennes suivant le point de vue où l'on se place.

Bolyai et Lobatchewski, ainsi que ceux qui ont suivi leur voie, prenant pour point de départ les propriétés les plus *intuitives* — qu'on nous permette ce terme dont nous avons généralement évité l'emploi en raison de son imprécision —, ont admis — inconsciemment, puisque leur raisonnement est imaginaire, — des propriétés équivalentes aux axiomes métriques, c'est-à-dire aux trois axiomes de Lie et à l'axiome d'Archimède, et ont laissé de côté le postulat des parallèles au sens où il se confond avec notre axiome PIII, propriété qui a paru moins solidaire du bloc géométrique, parce que l'intuition prend du vague lorsqu'on fait appel à l'idée de l'éloignement indéfini, et d'ailleurs seule propriété fondamentale qui fût alors explicitement énoncée.

Nous avons indiqué les conséquences de ces hypothèses et montré qu'elles sont incompatibles avec les propriétés des groupes métriques projectifs, si l'on ne modifie pas la conception des lignes idéales appelées « droites ». C'est uniquement au maintien de ce mot pour désigner des conceptions différentes que sont dues les dissertations scholastiques sur la « forme », la « nature », la « structure » de l'espace, expressions qui présentent sans doute une signification claire pour les personnes qui les emploient.

Quant aux analystes, dont Riemann, Helmholtz, Cayley, Sophus Lie, pour ne citer que les plus illustres, leur généralisation porte sur la notion de déplacement ou celle de distance, qui la représente. Dans ces conditions, surtout si un point n'est rien autre qu'un ensemble de trois coordonnées, ni l'axiome d'Archimède ni celui de l'unicité de l'asymptotique ne s'imposent. Les systèmes de coordonnées projectifs permettant de représenter très simplement les diverses métriques, on était conduit à donner au postulat des parallèles une signification purement métrique sans relation avec la forme des axes du groupe considéré. Aussi les analystes se sont-ils surtout attachés aux cas des groupes métriques projectifs.

DÉFINITION DE LA LIGNE DROITE. — Une ligne droite est déterminée (*parmi les lignes droites*) par la connaissance de deux de ses points.

Cette propriété ne saurait constituer une définition des lignes droites, et nous avons vu qu'il existe une infinité de familles de lignes qui présentent toutes les propriétés de la famille des droites intervenant dans les démonstrations géométriques et qui sont susceptibles de donner lieu à des doctrines ne différant de la Géométrie ordinaire que par les figures correspondantes aux diverses propositions.

Pourtant la proposition ci-dessus, suppression faite des mots entre parenthèses, a été prise parfois comme définition de la ligne droite.

Cette façon de voir s'explique, si elle ne se justifie pas, par la confusion en vertu de laquelle l'intuition privée de critique a incorporé l'idée métrique (basée sur celle de figure indéformable) dans l'idée de figure, alors que, dans la conception analytique, plus consciente et mieux informée, cette dernière est la seule idée essentielle de la Géométrie, la seule en dehors de laquelle le mot « géométrique » ne peut recevoir qu'une signification arbitraire.

La ligne droite est la seule ligne qui soit *covariante* (pour ainsi s'exprimer, en étendant la signification de ce terme emprunté à la théorie des formes algébriques) d'un couple de points dans tous les déplacements sans déformation, puisque c'est la seule ligne qui reste fixe dans ceux de ces déplacements qui laissent fixe le couple.

On peut donc dire que la ligne droite est la seule ligne qui soit déterminée par deux points et par l'idée de déplacement sans déformation. Mais nous avons vu que cette idée est restée incorporée dans l'idée géométrique elle-même avec une telle force de cohésion que personne n'a songé, avant l'immortel rationaliste Helmholtz, à la dégager explicitement des concepts synthétiques où elle était latente.

L'idée vulgaire, suivant laquelle la ligne droite *est déterminée par deux de ses points*, est donc légitime suivant la conception dans laquelle l'idée de déplacement fait partie intégrante de l'idée géométrique, c'est-à-dire dans laquelle

les propriétés métriques d'une figure sont des propriétés « intrinsèques » de cette figure.

L'explication de ces associations d'idées est d'ailleurs évidente, si l'on admet l'origine empirique des idées, théorie féconde, magistralement établie par Helmholtz¹ et lumineusement développée par Taine² : n'avons-nous pas en effet acquis l'habitude de considérer l'*identité* de la plupart des objets comme non affectée par leur déplacement ?

CONCLUSION. — Les notions *non définies* mises en œuvre dans les traités classiques de géométrie peuvent être réduites à deux concepts : celui de figure (comprenant les concepts de point, ligne, surface, continuité) et celui de déplacement d'une figure invariable.

Les propriétés de ces concepts interviennent dans les démonstrations classiques par le procédé que nous avons appelé le *raisonnement imagitatif*, à l'exception de la propriété des lignes droites exprimée par le postulat des parallèles, qui constitue ainsi le seul axiome explicitement énoncé.

Les résultats de l'examen critique auquel nous avons procédé peuvent être résumés de la manière suivante :

Les quatre axiomes métriques (les trois de Lie et celui d'Archimède) particularisent les déplacements d'une figure invariable parmi les *transformations ponctuelles*, de sorte que l'on peut, tout en réservant la possibilité de pousser plus loin l'analyse, fonder la Géométrie sur les seuls concepts de *figure* et de *transformation ponctuelle*.

Toutes les propriétés géométriques découlent de l'axiome AI, des quatre axiomes métriques et de l'axiome PIII, par lequel est représenté le postulat des parallèles, de sorte que tous les groupes de transformations ponctuelles satisfaisant à ces axiomes (l'énoncé de l'axiome PIII étant libellé de manière à viser les axes des groupes métriques et non pas seulement les lignes droites) donnent lieu à des propriétés susceptibles d'être exprimées par les diverses propositions de la Géométrie, pourvu que l'on modifie convenablement la signification des mots : égalité, droite, perpendiculaire, etc.

¹ HELMHOLTZ. *Optique physiologique*.

² TAINE. *De l'Intelligence*.

L'on obtient encore des métriques, mais pouvant différer plus ou moins de la métrique ordinaire, en laissant de côté les axiomes MIV et PIII, c'est-à-dire en prenant pour base de l'égalité géométrique un groupe métrique quelconque, savoir un groupe satisfaisant aux trois axiomes de Lie.

Dans une telle métrique, un rôle important est joué par une famille de lignes (axes du groupe métrique) présentant les propriétés attribuées aux droites par les axiomes PI et PII, et réciproquement, à toute famille de lignes jouissant de ces propriétés on peut faire correspondre une infinité de métriques.

L'on peut choisir notamment pour axes les lignes droites idéales, et alors les groupes métriques correspondants sont projectifs.

Mais, dans le cas où l'on admet l'axiome d'Archimède, il y a relation étroite entre la catégorie du groupe (euclidien, lobatchewskien ou riemannien) et celle de la famille des axes (lignes ouvertes présentant ou non la propriété de l'unicité de l'asymptotique et lignes fermées). Dans le cas du groupe riemannien, l'espace lui-même est une variété fermée.

Terminons en émettant le vœu qu'il en soit fini avec le caractère déconcertant qu'a pris la question des Géométries non-euclidiennes, caractère si opposé à l'esprit scientifique. Il suffirait pour cela que les gens raisonnables (et l'on doit comprendre parmi eux tous les mathématiciens) veuillent bien éviter l'emploi des mots : Géométries non-euclidiennes, espace, plans, droites non-euclidiens, alors qu'il s'agit simplement de *métriques* non-euclidiennes et de familles de surfaces ou de lignes ayant des propriétés communes avec les plans et les droites.

Si cette étude pouvait contribuer à ce résultat, nous nous féliciterions de l'avoir entreprise.

G. COMBEBIAC (Limoges).
