

SUR UNE FORMULE TRIGONOMÉTRIQUE D'INTERPOLATION

Autor(en): **Gomes Teixeira, F.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1904)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-7559>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

je l'écrirai de la manière suivante :

$$\frac{F(\operatorname{tang} x)}{\omega \cos x (\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_1)^\alpha \dots (\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_i)^\beta \dots (\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_k)^\lambda}$$

où

$$\omega = \cos^\alpha x_1 \dots \cos^\beta x_i \dots \cos^\lambda x_k .$$

Ensuite je considère la fonction rationnelle de $\operatorname{tang} x$

$$\frac{F(\operatorname{tang} x)}{F_1(\operatorname{tang} x)} ,$$

où

$$F_1(\operatorname{tang} x) = (\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_1)^\alpha \dots (\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_i)^\beta \dots (\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_k)^\lambda ,$$

et je la décompose en fractions simples ; ce qui donne

$$\frac{F(\operatorname{tang} x)}{F_1(\operatorname{tang} x)} = \sum_{i=1}^{i=k} \left[\frac{M_1^{(i)}}{\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_i} + \frac{M_2^{(i)}}{(\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_i)^2} + \dots + \frac{M_\beta^{(i)}}{(\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_i)^\beta} \right] ,$$

où $M_1^{(i)}$, $M_2^{(i)}$, ..., $M_\beta^{(i)}$ représentent des constantes qui coïncident avec les coefficients de $h^{\beta-1}$, $h^{\beta-2}$, ..., h^0 dans le développement de

$$\frac{h^\beta F(\operatorname{tang} x_i + h)}{F_1(\operatorname{tang} x_i + h)} ;$$

et par conséquent

$$\frac{F(\operatorname{tang} x)}{F_1(\operatorname{tang} x)} = \sum_{i=1}^{i=k} \left[\frac{M_1^{(i)} \cos x_i \cos x}{\sin(x - x_i)} + \frac{M_2^{(i)} \cos^2 x_i \cos^2 x}{\sin^2(x - x_i)} + \dots + \frac{M_\beta^{(i)} \cos^\beta x_i \cos^\beta x}{\sin^\beta(x - x_i)} \right] .$$

Mais d'un autre côté, si l'on décompose en des fractions simples la fraction $\frac{1}{F_1(\operatorname{tang} x)}$ et si l'on représente par

$A_1, A_2, \dots, A_\alpha ; \dots, B_1, B_2, \dots, B_\beta ; \dots$ les numérateurs de ces fractions, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{F(\operatorname{tang} x)}{F_1(\operatorname{tang} x)} &= \frac{A_1 F(\operatorname{tang} x)}{\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_1} + \frac{A_2 F(\operatorname{tang} x)}{(\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_1)^2} + \dots + \frac{A_\alpha F(\operatorname{tang} x)}{(\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_1)^\alpha} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{B_1 F(\operatorname{tang} x)}{\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_i} + \frac{B_2 F(\operatorname{tang} x)}{(\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_i)^2} + \dots + \frac{B_\beta F(\operatorname{tang} x)}{(\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_i)^\beta} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{P_1(\operatorname{tang} x)}{\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_k} + \frac{P_2 F(\operatorname{tang} x)}{(\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_k)^2} + \dots + \frac{P_\lambda F(\operatorname{tang} x)}{(\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_k)^\lambda} \end{aligned}$$

et, par conséquent, en posant $\operatorname{tang} x = \operatorname{tang} x_i + h$,

$$\begin{aligned} \frac{h^\beta F(\operatorname{tang} x_i + h)}{F_1(\operatorname{tang} x_i + h)} &= B_1 \left[h^{\beta-1} F(\operatorname{tang} x_i) + h^\beta F'(\operatorname{tang} x_i) + \dots \right] \\ &+ B_2 \left[h^{\beta-2} F(\operatorname{tang} x_i) + h^{\beta-1} F'(\operatorname{tang} x_i) + \frac{1}{2} h^\beta F''(\operatorname{tang} x_i) + \dots \right] \\ &+ \dots \\ &+ B_\beta \left[F(\operatorname{tang} x_i) + h F'(\operatorname{tang} x_i) + \dots + \frac{h^{\beta-1}}{(\beta-1)!} F^{\beta-1}(\operatorname{tang} x_i) + \dots \right] \\ &+ Rh^\beta, \end{aligned}$$

où Rh^β représente la partie du développement considéré qui provient des fractions

$$\frac{A_1 h^\beta F(\operatorname{tang} x_i + h)}{\operatorname{tang} x_i + h - \operatorname{tang} x_1}, \quad \frac{A_2 h^\beta F(\operatorname{tang} x_i + h)}{(\operatorname{tang} x_i + h - \operatorname{tang} x_1)^2}, \quad \text{etc.}$$

On a donc

$$\begin{aligned} M_1^{(i)} &= B_1 F(\operatorname{tang} x_i) + B_2 F'(\operatorname{tang} x_i) + \dots + \frac{B_\beta}{(\beta-1)!} F^{(\beta-1)}(\operatorname{tang} x_i), \\ M_2^{(i)} &= B_2 F(\operatorname{tang} x_i) + B_3 F'(\operatorname{tang} x_i) + \dots + \frac{B_\beta}{(\beta-2)!} F^{(\beta-2)}(\operatorname{tang} x_i), \\ &\dots \\ M_\beta^{(i)} &= B_\beta F(\operatorname{tang} x_i), \end{aligned}$$

2. — Voici encore un autre problème qu'on peut résoudre au moyen de la formule qu'on vient de trouver, en remarquant que l'expression qu'elle donne pour $f(\sin x, \cos x)$ peut être réduite premièrement à la forme

$$f(\sin x, \cos x) = K_m \cos^m x + K_{m-2} \cos^{m-2} x + \dots \\ + \sin x [L_{m-1} \cos^{m-1} x + L_{m-3} \cos^{m-3} x + \dots],$$

et qu'ensuite, au moyen des égalités connues

$$2^{a-1} \cos^a x = \cos ax + \binom{a}{1} \cos(a-2)x + \binom{a}{2} \cos(a-4)x + \dots + \frac{1}{2} \binom{a}{\frac{1}{2}a}$$

si a est un entier pair, et

$$2^{a-1} \cos^a x = \cos ax + \binom{a}{1} \cos(a-2)x + \binom{a}{2} \cos(a-4)x + \dots + \binom{a}{\frac{1}{2}(a-1)} \cos x,$$

si a est un entier impair, elle peut être réduite à la forme suivante :

$$(2) \left\{ \begin{aligned} f(\sin x, \cos x) &= R_m \cos mx + R_{m-2} \cos(m-2)x + \dots + R_1 \cos x \\ &+ S_m \sin mx + S_{m-2} \sin(m-2)x + \dots + S_1 \sin x, \end{aligned} \right.$$

quand m est *impair*, et à la suivante :

$$(3) \left\{ \begin{aligned} f(\sin x, \cos x) &= R_m \cos mx + R_{m-2} \cos(m-2)x + \dots + R_0 \\ &+ S_m \sin mx + S_{m-2} \sin(m-2)x + \dots + S_2 \sin 2x, \end{aligned} \right.$$

quand m est pair.

On peut donc résoudre, au moyen de la formule (1), le problème qui a pour but de chercher les coefficients qui entrent dans une des expressions (2) ou (3), quand sont données les valeurs qu'elle et ses dérivées prennent aux points x_1, x_2, \dots, x_k , en déterminant premièrement, au moyen de ces valeurs et de la formule (1), la fonction $f(\sin x, \cos x)$, et en la réduisant ensuite à une des formes (2) ou (3).

F. GOMES TEIXEIRA (Porto).