

CORRESPONDANCE

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1904)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

CORRESPONDANCE

A propos d'un théorème sur le triangle.

Le théorème examiné par M. Kariya dans le n° de mars de *L'Enseignement mathématique* (p. 130-132) a donné lieu à plusieurs lettres et communications dont nous donnons le résumé ci-après. La Rédaction.

I. — Rappelons le théorème énoncé par M. Kariya :

Inscrivons un cercle dans un triangle donné ABC ; nommons respectivement X, Y, Z les points de contact avec les trois côtés BC, CA, AB . Si l'on prend sur les droites OX, OY, OZ des points D, E, F également distants du point O , les trois droites AD, BE, CF concourent en un même point.

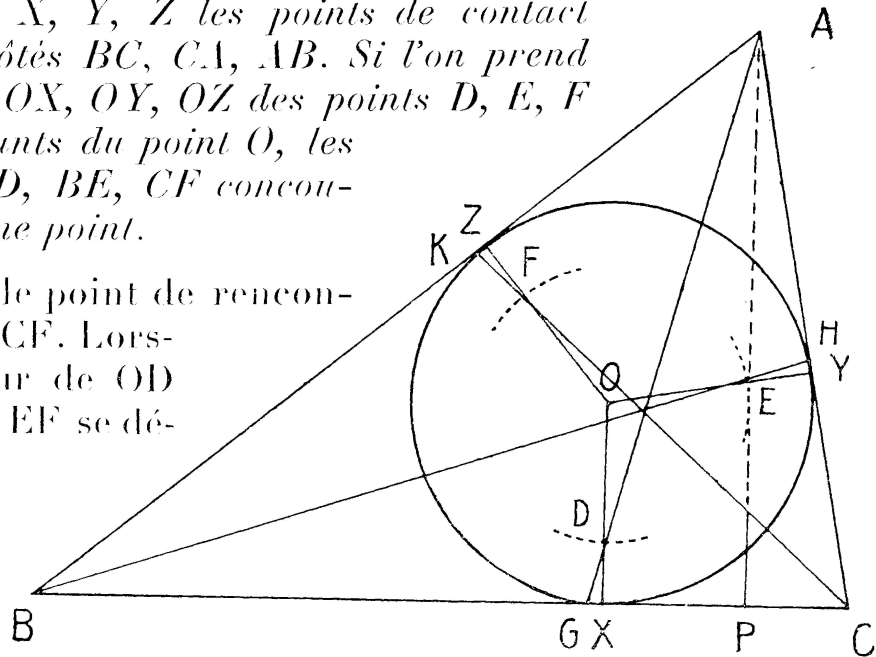
Appelons M le point de rencontre de BE et de CF . Lorsque la grandeur de OD varie, la droite EF se déplace parallèlement à elle-même. Les points tels que M sont alors les

points d'intersection des rayons de deux faisceaux homographiques de centres B, C , ils appartiennent à une conique \mathcal{F} . Cette courbe passe par B et C , elle passe par l'orthocentre H du triangle ABC , car on a ce point lorsque la parallèle à EF est à l'infini, elle passe par O , et enfin par A , car on obtient ce point en prenant la parallèle à EF qui joint les points où AB et AC sont coupés par OY, OZ . On a ainsi cinq points de \mathcal{F} , ce sont : B, C, O, H, A .

On peut opérer de la même manière en employant des parallèles à ED , on obtient une conique dont les points sont les intersections des rayons de deux faisceaux homographiques de centres A, B . Cette conique n'est autre que \mathcal{F} , puisqu'elle passe par A, B, O, H, C .

Le point M , où la droite BE est coupée par CF , est alors aussi le point où cette droite est coupée par AD , donc les droites AD, BE, CF passent par le même point.

X. (Paris). CANTONI (Viadana). DEMOULIN (Gand).



II. — (1) Soit $OX = r$, $OD = t$; les triangles ABC, DEF étant réciproques par rapport à une circonférence de centre O et de rayon \sqrt{rt} , sont homologues.

(2) Si l'on prend le triangle ABC comme triangle de référence, les coordonnées trilineaires de D sont $r - t$, $r + t \cos C$, $r + t \cos B$, et la droite AD sera représentée par l'équation

$$\beta(r + t \cos B) = \gamma(r + t \cos C) .$$

on en déduit que les droites AD, BE, CF passent par le point

$$\alpha(r + t \cos A) = \beta(r + t \cos B) = \gamma(r + t \cos C) .$$

HAROLD Hilton (Bangor, North Wales).

III. — La proposition énoncée par J. Kariya n'est pas le moins du monde nouvelle. Elle découle comme cas particulier de l'Étude sur les *systèmes isogonaux du triangle* que j'ai présentée au congrès de Carthage (A. F. A. S. 1896, pp. 89-105). Sa démonstration est des plus simples en se servant des coordonnées trilineaires.

Combinons les notations de M. Kariya et les miennes; nous reconnaitrons sans longs calculs que

$$u = \cos A - \sin A \frac{p - a}{r - K} = - \frac{r + K \cos A}{r - K} ,$$

$$v = \frac{r + K \cos B}{r - K} , \quad w = - \frac{r + K \cos C}{r - K} .$$

car les systèmes de droites AF et AE, BD et BF, CE et CD sont isogonaux à cause d'égalités de triangles rectangles que la seule inspection de la figure met immédiatement en évidence.

Les droites AD BE et CF ont donc pour point commun le centre isogonal P,

$$ux = vy = wz .$$

En faisant couper BF et CE, on a D' inverse de D; soient, de même E' et F' inverses de E et F. Les droites AD' BE' et CF' se coupent aussi au point P' inverse de P et pour lequel,

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z}{w} .$$

Il est intéressant de savoir ce que deviennent P et P' quand on fait varier K. J'ai prouvé que si d'une façon générale les points D et E décrivent deux droites Δ et Δ' , le point F qui complète leur système isogonal décrit aussi une droite Δ'' , ce qui a lieu en effet dans la figure de M. Kariya. En outre P décrit une conique circonscrite au triangle, et P' la droite inverse.

La conique lieu de P a ici pour équation

$$\sum \frac{\cos B - \cos C}{x} = 0 \quad \text{ou} \quad \sum \frac{\operatorname{tg} \frac{C}{2} - \operatorname{tg} \frac{B}{2}}{x} = 0.$$

C'est donc une hyperbole équilatère passant par les points suivants : le centre I du cercle inscrit, l'orthocentre H, le point de Gergonne G,

$$x(1 + \cos A) = y(1 + \cos B) = z(1 + \cos C),$$

qui s'obtient pour $K = r$, et son réciproque ν , point de Nagel, qui correspond à $K = -r$.

Sa seconde équation prouve qu'elle renferme encore un point particulier φ ,

$$x \operatorname{tg} \frac{A}{2} = y \operatorname{tg} \frac{B}{2} = z \operatorname{tg} \frac{C}{2},$$

qui ne semble pas avoir été envisagé jusqu'à ce jour. Ce point s'obtient quand on fait

$$K = \frac{-r}{1 + 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{-rR}{R + p},$$

et peut se construire aisément de la manière suivante.

Soient α_1 et α_2 les contacts de AB et AC avec les cercles exinscrits dans les suppléments de A, α'_1 et α'_2 les contacts des prolongements opposés de ces mêmes côtés avec les mêmes cercles; puis prenons les milieux α de $\alpha_1 \alpha_2$ et α' de $\alpha'_1 \alpha'_2$; l'on a, en désignant par y' et z' les distances de α' à AC et AB,

$$\frac{y'}{z'} = \frac{A\alpha'_1}{A\alpha'_2} = \frac{p-b}{p-c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B}{2}};$$

donc φ est le point de concours des droites $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$.

Si l'on considère à son tour le point α , on a de même

$$\frac{y}{z} = \frac{A\alpha_1}{A\alpha_2} = \frac{p-b}{p-c};$$

par suite, $A\alpha$, $B\beta$ et $C\gamma$ se rencontrent au point φ' inverse de φ .

De son côté, le point P' décrit la droite IO joignant les centres des cercles inscrit et circonscrit, droite qui renferme en outre l'inverse ν' du point de Nagel, son réciproque G' inverse de G, et le point φ' construit précédemment. Il faut remarquer que IO est tangente à la conique.

En remplaçant dans ce qui précède le cercle inscrit à ABC par

chacun des autres cercles tritangents, on obtient des résultats analogues sur lesquels je crois inutile d'insister.

P. BARBARIN (Bordeaux).

Sur un théorème de la géométrie riemannienne.

Messieurs les Directeurs,

En partant de la supposition que *la somme des angles d'un triangle puisse être supérieure à 2 droits*, on démontre que toutes

les droites situées dans un plan sont concourantes. Cette démonstration peut s'effectuer de différentes façons. Je crois que celle que je donne ci-dessous est nouvelle et mérite d'être signalée aux lecteurs de *L'Enseignement mathématique*.

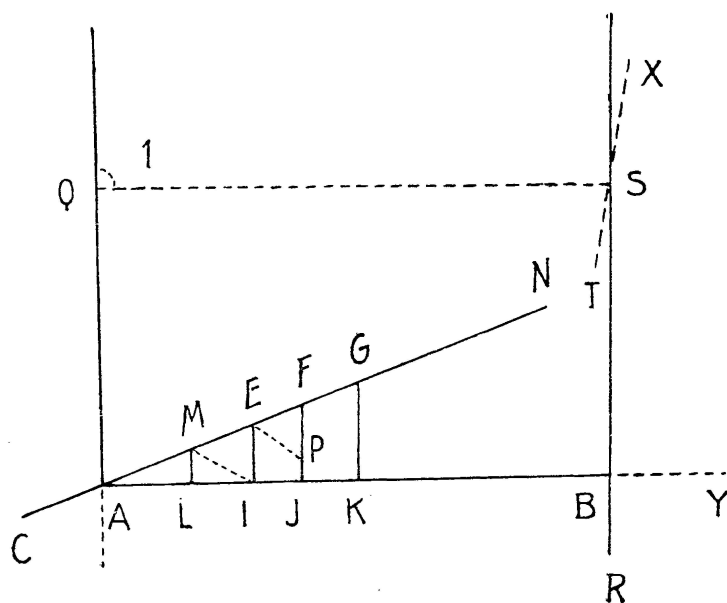
Soient CN et RS deux droites quelconques situées dans un même plan (fig. 1).

Prenons un point A

sur l'une d'elles, CN, et menons AB perpendiculaire sur la seconde.

1° Considérons d'abord le cas le plus général où AB est perpendiculaire sur RS sans l'être sur CN. Si BAN est l'angle aigu déterminé en A, portons sur AN, et à partir de A, un nombre quelconque de longueurs égales entre elles AM, ME, EF, FG, ..., puis abaissons sur AB les perpendiculaires ML, EI, FJ, GK, Nous allons d'abord montrer que les longueurs AL, LI, IJ, JK, ..., ainsi déterminées, vont en augmentant à mesure que l'on se rapproche de B.

Commençons par prouver que nous avons $AL < LI$. Si nous supposons pour un instant que ML, au lieu d'être la perpendiculaire abaissée du milieu de AE sur AB, soit la perpendiculaire élevée sur le milieu de AI, nous verrons que son extrémité serait alors plus rapprochée de E que de A. En effet, menons MI. Dans le triangle rectangle AEI, l'angle AEI doit être plus grand que le complément de EAI, sinon la somme des trois angles de ce triangle ne pourrait être supérieure à deux droits. Par suite, cet angle AEI doit être plus grand que EIM qui est précisément le complément de AIM et aussi celui de son égal EAI dans le triangle AMI qui serait isocèle d'après notre hypothèse provisoire. Nous en déduisons que, dans le triangle MIE, le côté MI est plus grand que ME, comme



opposé au plus grand angle. Et, comme dans le cas de cette supposition provisoire, $MI = MA$, on aurait donc $ME < MA$. Par suite, puisque la perpendiculaire élevée sur le milieu de AI aboutirait à un point plus rapproché de E que de A , nous devons en conclure que la perpendiculaire abaissée du milieu de AE sur AB aura évidemment son pied plus rapproché de A que de I ; nous avons donc $AL < LI$.

Nous allons maintenant prouver que l'on a $LI < IJ$. Prenons $JP = LM$ et menons EP . La somme des angles du quadrilatère birectangle $LMFJ$ devant être supérieure à 4 droits, la somme des deux angles MFJ et FML doit évidemment être supérieure à 2 droits.

Si, pour un instant, nous supposons que EI , au lieu d'être la perpendiculaire abaissée du milieu de MF sur LJ , est, au contraire, la perpendiculaire élevée sur le milieu de LJ , nous voyons immédiatement que les angles EPJ et EML seraient alors égaux et auraient par suite le même supplément EPF . Donc, pour que la somme $MFJ + FML$ soit supérieure à 2 droits, il faut nécessairement que le premier de ces deux angles soit supérieur à EPF . Dans le triangle EPF , EP serait donc plus grand que EF comme opposé au plus grand angle. Mais notre hypothèse provisoire entraînant $EP = EM$, il en résulte $ME > EF$; ce qui signifie que le sommet de la perpendiculaire élevée sur le milieu de LJ serait plus rapproché de F que de M . Par suite, le pied de la perpendiculaire abaissée du milieu de MF sur LJ sera en réalité plus près de L que de J . Nous avons donc $LI < IJ$.

Il sera tout aussi facile d'établir en troisième lieu que IJ est plus petit que JK , et ainsi de suite. Or, en admettant même que les perpendiculaires abaissées des points M, E, F, G, \dots , ne déterminent que des segments égaux sur AB , il nous serait déjà aisé de prouver que les droites CN et BS se coupent; car, si l'un de ces segments est contenu plus de n fois (n désignant un nombre entier), et moins de $(n + 1)$ fois dans AB , il suffit de porter $(n + 1)$ fois la longueur AM sur la direction AN , à partir de A , pour obtenir quelque part sur AN un point tel que la perpendiculaire menée de ce point sur la direction ABY tombe au delà de B , AN prolongé rencontrant alors nécessairement RX au-dessus de AB . *A fortiori* en sera-t-il ainsi lorsque les segments déterminés sur AB par les perpendiculaires iront en croissant de A vers B . Les deux droites considérées sont donc concourantes au-dessus de AB . C. Q. F. D.

2° Examinons maintenant le cas particulier où les deux droites considérées AQ et BS sont perpendiculaires à une troisième AB . Prenons $AQ = BS$ et menons QS . Dans le quadrilatère birectangle isocèle $ABQS$, les deux angles égaux en Q et en S sont obtus.

Soit TX la perpendiculaire en S sur QS ; elle tombe nécessairement à l'intérieur de l'angle obtus QSB. Les deux droites AQ et TX font donc, la première, un angle aigu 1 au-dessus de QS, la seconde un angle droit QSX avec QS. Nous sommes alors ramenés au premier cas, ou cas général. Par suite, les deux droites considérées, suffisamment prolongées, se rencontreront au-dessus de QS ; mais, comme AQ ne saurait rencontrer TX sans couper d'abord la droite BS prolongée, nous en concluons que AQ et BS ont un point commun au-dessus de QS. C. Q. F. D.

Remarque I. Les perpendiculaires AQ et BS ont évidemment au-dessous de QS un second point d'intersection, symétrique du premier par rapport à AB. Elles renferment donc un espace. Il en est de même pour deux droites quelconques du plan. On trouvera pour ce second cas, qui est le cas général, une démonstration très claire dans les *Premiers principes de métageométrie* du professeur Mansion.

Remarque II. Si, dans le triangle rectangle ABD (fig. 2), nous supposons que les perpendiculaires ML, EI, FJ, GK...., ont été menées de

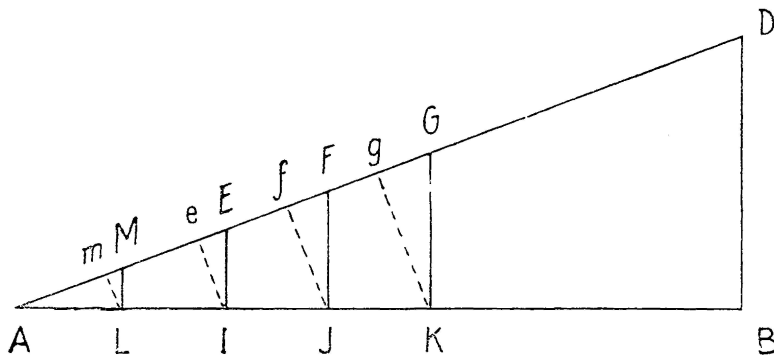


Fig. 2.

telle sorte que leurs pieds déterminent sur AB des segments égaux, $AL = LI = IJ = JK = \dots$, il sera facile de prouver que l'on a :

$$\frac{AL}{AM} < \frac{LI}{AE} < \frac{IJ}{AF} < \frac{JK}{AG} < \dots < \frac{AB}{AD}$$

Pour que tous les rapports qui précèdent $\frac{AB}{AD}$ deviennent égaux à ce dernier, il faudra les rendre plus grands en diminuant leurs dénominateurs respectifs des quantités Mm, Ee, Ff, Gg, \dots , ou $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \dots$, telles que l'on ait :

$$\frac{AL}{AM - \lambda_1} = \frac{LI}{AE - \lambda_2} = \frac{IJ}{AF - \lambda_3} = \frac{JK}{AG - \lambda_4} = \dots = \frac{AB}{AD}$$

Malgré cela, les triangles $LAm, IAe, JAf, KAg, \dots$ ne seront ni semblables entre eux, ni semblables à BAD ; car les figures semblables n'existent pas dans les géométries non-euclidiennes (il faut cependant faire exception pour les polygones réguliers et pour les figures égales évidemment).

Edmond BORDAGE.

(St-Denis; Ile de la Réunion.)