propos d'un théorème sur le triangle.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1904)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

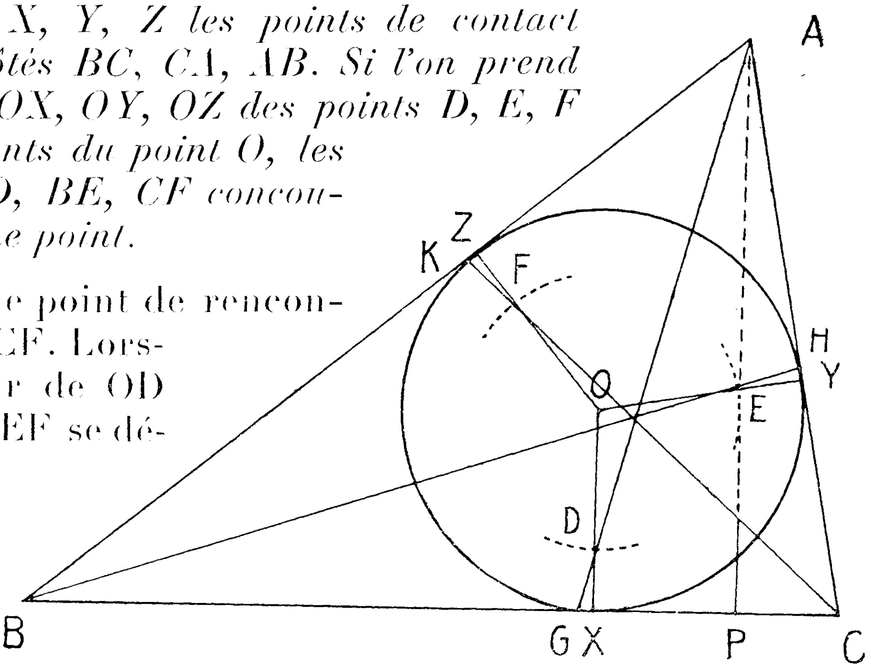
CORRESPONDANCE

A propos d'un théorème sur le triangle.

Le théorème examiné par M. Kariya dans le n° de mars de *L'Enseignement mathématique* (p. 130-132) a donné lieu à plusieurs lettres et communications dont nous donnons le résumé ci-après. *La Rédaction.*

I. — Rappelons le théorème énoncé par M. Kariya:

Inscrivons un cercle dans un triangle donné ABC; nommons respectivement X, Y, Z les points de contact avec les trois côtés BC, CA, AB. Si l'on prend sur les droites OX, OY, OZ des points D, E, F également distants du point O, les trois droites AD, BE, CF concourent en un même point.



Appelons M le point de rencontre de BE et de CF. Lorsque la grandeur de OD varie, la droite EF se déplace parallèlement à elle-même. Les points tels que M sont alors les points d'intersection des rayons de deux faisceaux homographiques de centres B, C, ils appartiennent à une conique **Γ**. Cette courbe passe par B et C, elle passe par l'orthocentre H du triangle ABC, car on a ce point lorsque la parallèle à EF est à l'infini, elle passe par O, et enfin par A, car on obtient ce point en prenant la parallèle à EF qui joint les points où AB et AC sont coupés par OY, OZ. On a ainsi cinq points de **Γ**, ce sont: B, C, O, H, A.

On peut opérer de la même manière en employant des parallèles à ED, on obtient une conique dont les points sont les intersections des rayons de deux faisceaux homographiques de centres A, B. Cette conique n'est autre que **Γ**, puisqu'elle passe par A, B, O, H, C.

Le point M, où la droite BE est coupée par CF, est alors aussi le point où cette droite est coupée par AD, donc les droites AD, BE, CF passent par le même point.

X. (Paris). Cantoni (Viadana). Demoulin (Gand).

II. — (1) Soit OX $= r$, OD $= t$; les triangles ABC, DEF étant réciproques par rapport à une circonférence de centre O et de rayon $\sqrt{rt}$, sont homologiques.

(2) Si l'on prend le triangle ABC comme triangle de référence, les coordonnées trilinéaires de D sont $r - t$, $r + t\cos C$, $r + \cos B$, et la droite AD sera représentée par l'équation

$$\beta(r + t\cos B) = \gamma(r + t\cos C) .$$

on en déduit que les droites AD, BE, CF passent par le point

$$\alpha(r + t\cos A) = \beta(r + t\cos B) = \gamma(r + t\cos C) .$$

Harold Hilton (Bangor, North Wales).

III. — La proposition énoncée par J. Kariya n'est pas le moins du monde nouvelle. Elle découle comme cas particulier de l'Etude sur les *systèmes isogonaux du triangle* que j'ai présentée au congrès de Carthage (A. F. A. S. 1896, pp. 89-105). Sa démonstration est des plus simples en se servant des coordonnées trilinéaires.

Combinons les notations de M. Kariya et les miennes; nous reconnaîtrons sans longs calculs que

$$u = \cos A - \sin A \frac{p - a}{r - K} = -\frac{r + K\cos A}{r - K},$$

$$v = = \frac{r + K\cos B}{r - K}, \quad w = -\frac{r + K\cos C}{r - K} .$$

car les systèmes de droites AF et AE, BD et BF, CE et CD sont isogonaux à cause d'égalités de triangles rectangles que la seule inspection de la figure met immédiatement en évidence.

Les droites AD BE et CF ont donc pour point commun le centre isogonal P,

$$ux = vy = wz .$$

En faisant couper BF et CE, on a D′ inverse de D; soient, de même E′ et F′ inverses de E et F. Les droites AD′ BE′ et CF′ se coupent aussi au point P′ inverse de P et pour lequel,

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z}{w} .$$

Il est intéressant de savoir ce que deviennent P et P′ quand on fait varier K. J'ai prouvé que si d'une façon générale les points D et E décrivent deux droites Δ et Δ', le point F qui complète leur système isogonal décrit aussi une droite Δ'', ce qui a lieu en effet dans la figure de M. Kariya. En outre P décrit une conique circonscrite au triangle, et P′ la droite inverse.

La conique lieu de P a ici pour équation

$$\sum \frac{\cos B - \cos C}{x} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \sum \frac{\operatorname{tg}\frac{C}{2} - \operatorname{tg}\frac{B}{2}}{x} = 0.$$

C'est donc une hyperbole équilatère passant par les points suivants : le centre I du cercle inscrit, l'orthocentre H, le point de Gergonne G,

$$x(1 + \cos A) = y(1 + \cos B) = z(1 + \cos C),$$

qui s'obtient pour $K = r$, et son réciproque ν, point de Nagel, qui correspond à $K = -r$.

Sa seconde équation prouve qu'elle renferme encore un point particulier φ,

$$x \operatorname{tg}\frac{A}{2} = y \operatorname{tg}\frac{B}{2} = z \operatorname{tg}\frac{C}{2},$$

qui ne semble pas avoir été envisagé jusqu'à ce jour. Ce point s'obtient quand on fait

$$K = \frac{-r}{1 + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{-rR}{R + p},$$

et peut se construire aisément de la manière suivante.

Soient α_1 et α_2 les contacts de AB et AC avec les cercles exinscrits dans les suppléments de A, α'_1 et α'_2 les contacts des prolongements opposés de ces mêmes côtés avec les mêmes cercles; puis prenons les milieux α de $\alpha_1\alpha_2$ et α' de $\alpha'_1\alpha'_2$; l'on a, en désignant par y' et z' les distances de α' à AC et AB,

$$\frac{y'}{z'} = \frac{A\alpha'_1}{A\alpha'_2} = \frac{p-b}{p-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B}{2}};$$

donc φ est le point de concours des droites $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$.

Si l'on considère à son tour le point α, on a de même

$$\frac{y}{z} = \frac{A\alpha_1}{A\alpha_2} = \frac{p-b}{p-c};$$

par suite, $A\alpha$ $B\beta$ et $C\gamma$ se rencontrent au point φ' inverse de φ.

De son côté, le point P' décrit la droite IO joignant les centres des cercles inscrit et circonscrit, droite qui renferme en outre l'inverse ν' du point de Nagel, son réciproque G' inverse de G, et le point φ' construit précédemment. Il faut remarquer que IO est tangente à la conique.

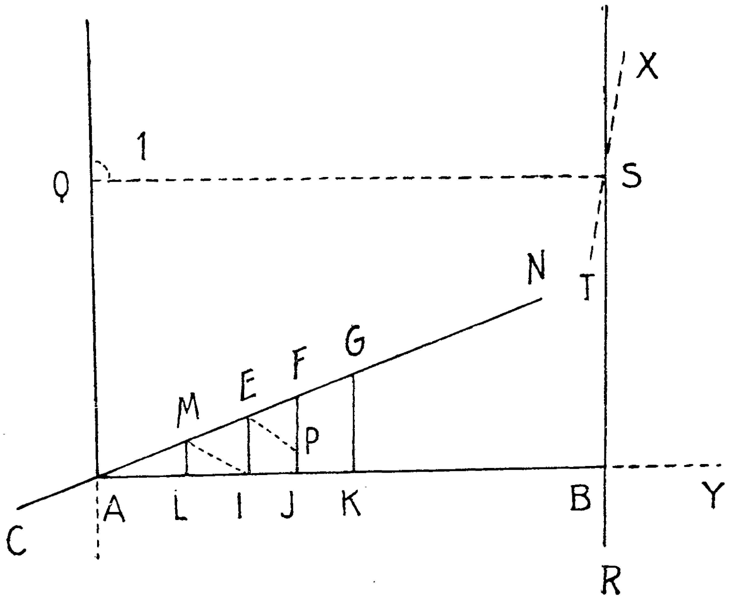
En remplaçant dans ce qui précède le cercle inscrit à ABC par chacun des autres cercles tritangents, on obtient des résultats analogues sur lesquels je crois inutile d'insister.

P. Barbarin (Bordeaux).

Sur un théorème de la géométrie riemanienne.

Messieurs les Directeurs,

En partant de la supposition que *la somme des angles d'un triangle puisse être supérieure à 2 droits, on démontre que toutes les droites situées dans un plan sont concourantes.* Cette démonstration peut s'effectuer de différentes façons. Je crois que celle que je donne ci-dessous est nouvelle et mérite d'être signalée aux lecteurs de *L'Enseignement mathématique.*



Soient CN et RS deux droites quelconques situées dans un même plan (fig. 1).

Prenons un point A sur l'une d'elles, CN, et menons AB perpendiculaire sur la seconde.

1° Considérons d'abord le cas le plus général où AB est perpendiculaire sur RS sans l'être sur CN. Si BAN est l'angle aigu déterminé en A, portons sur AN, et à partir de A, un nombre quelconque de longueurs égales entre elles AM, ME, EF, FG ,... , puis abaissons sur AB les perpendiculaires ML, EI, FJ, GK ,... . Nous allons d'abord montrer que les longueurs AL, LI, IJ, JK....., ainsi déterminées, vont en augmentant à mesure que l'on se rapproche de B.

Commençons par prouver que nous avons $AL < LI$. Si nous supposons pour un instant que ML, au lieu d'être la perpendiculaire abaissée du milieu de AE sur AB, soit la perpendiculaire élevée sur le milieu de AI, nous verrons que son extrémité serait alors plus rapprochée de E que de A. En effet, menons MI. Dans le triangle rectangle AEI, l'angle AEI doit être plus grand que le complément de EAI, sinon la somme des trois angles de ce triangle ne pourrait être supérieure à deux droits. Par suite, cet angle AEI doit être plus grand que EIM qui est précisément le complément de AIM et aussi celui de son égal EAI dans le triangle AMI qui serait isocèle d'après notre hypothèse provisoire. Nous en déduisons que, dans le triangle MIE, le côté MI est plus grand que ME, comme