

# Sur un théorème de la géométrie riemannienne.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1904)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

chacun des autres cercles tritangents, on obtient des résultats analogues sur lesquels je crois inutile d'insister.

P. BARBARIN (Bordeaux).

### Sur un théorème de la géométrie riemannienne.

Messieurs les Directeurs,

En partant de la supposition que *la somme des angles d'un triangle puisse être supérieure à 2 droits*, on démontre que toutes

les droites situées dans un plan sont concourantes. Cette démonstration peut s'effectuer de différentes façons. Je crois que celle que je donne ci-dessous est nouvelle et mérite d'être signalée aux lecteurs de *L'Enseignement mathématique*.

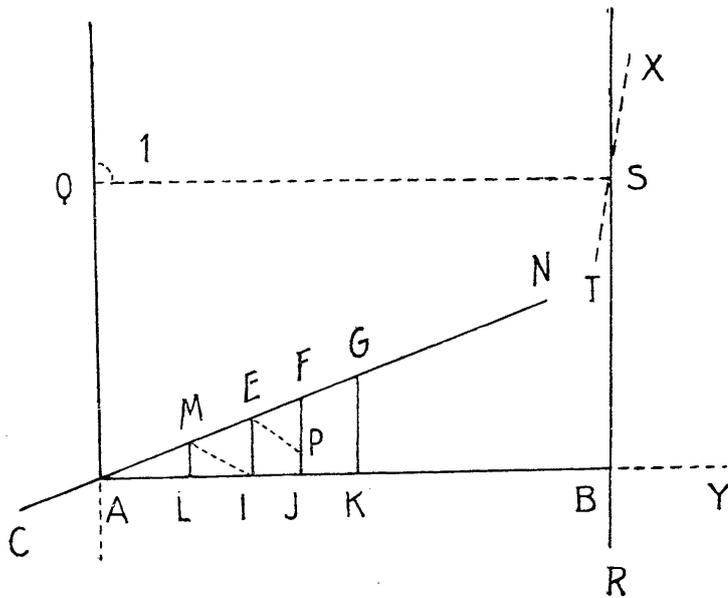
Soient CN et RS deux droites quelconques situées dans un même plan (fig. 1).

Prenons un point A

sur l'une d'elles, CN, et menons AB perpendiculaire sur la seconde.

1° Considérons d'abord le cas le plus général où AB est perpendiculaire sur RS sans l'être sur CN. Si BAN est l'angle aigu déterminé en A, portons sur AN, et à partir de A, un nombre quelconque de longueurs égales entre elles AM, ME, EF, FG, ..., puis abaissons sur AB les perpendiculaires ML, EI, FJ, GK, .... Nous allons d'abord montrer que les longueurs AL, LI, IJ, JK, ..., ainsi déterminées, vont en augmentant à mesure que l'on se rapproche de B.

Commençons par prouver que nous avons  $AL < LI$ . Si nous supposons pour un instant que ML, au lieu d'être la perpendiculaire abaissée du milieu de AE sur AB, soit la perpendiculaire élevée sur le milieu de AI, nous verrons que son extrémité serait alors plus rapprochée de E que de A. En effet, menons MI. Dans le triangle rectangle AEI, l'angle AEI doit être plus grand que le complément de EAI, sinon la somme des trois angles de ce triangle ne pourrait être supérieure à deux droits. Par suite, cet angle AEI doit être plus grand que EIM qui est précisément le complément de AIM et aussi celui de son égal EAI dans le triangle AMI qui serait isocèle d'après notre hypothèse provisoire. Nous en déduisons que, dans le triangle MIE, le côté MI est plus grand que ME, comme



opposé au plus grand angle. Et, comme dans le cas de cette supposition provisoire,  $MI = MA$ , on aurait donc  $ME < MA$ . Par suite, puisque la perpendiculaire élevée sur le milieu de  $AI$  aboutirait à un point plus rapproché de  $E$  que de  $A$ , nous devons en conclure que la perpendiculaire abaissée du milieu de  $AE$  sur  $AB$  aura évidemment son pied plus rapproché de  $A$  que de  $I$ ; nous avons donc  $AL < LI$ .

Nous allons maintenant prouver que l'on a  $LI < IJ$ . Prenons  $JP = LM$  et menons  $EP$ . La somme des angles du quadrilatère birectangle  $LMFJ$  devant être supérieure à 4 droits, la somme des deux angles  $MFJ$  et  $FML$  doit évidemment être supérieure à 2 droits.

Si, pour un instant, nous supposons que  $EI$ , au lieu d'être la perpendiculaire abaissée du milieu de  $MF$  sur  $LJ$ , est, au contraire, la perpendiculaire élevée sur le milieu de  $LJ$ , nous voyons immédiatement que les angles  $EPJ$  et  $EML$  seraient alors égaux et auraient par suite le même supplément  $EPF$ . Donc, pour que la somme  $MFJ + FML$  soit supérieure à 2 droits, il faut nécessairement que le premier de ces deux angles soit supérieur à  $EPF$ . Dans le triangle  $EPF$ ,  $EP$  serait donc plus grand que  $EF$  comme opposé au plus grand angle. Mais notre hypothèse provisoire entraînant  $EP = EM$ , il en résulte  $ME > EF$ ; ce qui signifie que le sommet de la perpendiculaire élevée sur le milieu de  $LJ$  serait plus rapproché de  $F$  que de  $M$ . Par suite, le pied de la perpendiculaire abaissée du milieu de  $MF$  sur  $LJ$  sera en réalité plus près de  $L$  que de  $J$ . Nous avons donc  $LI < IJ$ .

Il sera tout aussi facile d'établir en troisième lieu que  $IJ$  est plus petit que  $JK$ , et ainsi de suite. Or, en admettant même que les perpendiculaires abaissées des points  $M, E, F, G, \dots$ , ne déterminent que des segments égaux sur  $AB$ , il nous serait déjà aisé de prouver que les droites  $CN$  et  $BS$  se coupent; car, si l'un de ces segments est contenu plus de  $n$  fois ( $n$  désignant un nombre entier), et moins de  $(n + 1)$  fois dans  $AB$ , il suffit de porter  $(n + 1)$  fois la longueur  $AM$  sur la direction  $AN$ , à partir de  $A$ , pour obtenir quelque part sur  $AN$  un point tel que la perpendiculaire menée de ce point sur la direction  $ABY$  tombe au delà de  $B$ ,  $AN$  prolongé rencontrant alors nécessairement  $RX$  au-dessus de  $AB$ . *A fortiori* en sera-t-il ainsi lorsque les segments déterminés sur  $AB$  par les perpendiculaires iront en croissant de  $A$  vers  $B$ . Les deux droites considérées sont donc concourantes au-dessus de  $AB$ . C. Q. F. D.

2° Examinons maintenant le cas particulier où les deux droites considérées  $AQ$  et  $BS$  sont perpendiculaires à une troisième  $AB$ . Prenons  $AQ = BS$  et menons  $QS$ . Dans le quadrilatère birectangle isocèle  $ABQS$ , les deux angles égaux en  $Q$  et en  $S$  sont obtus.

Soit TX la perpendiculaire en S sur QS ; elle tombe nécessairement à l'intérieur de l'angle obtus QSB. Les deux droites AQ et TX font donc, la première, un angle aigu 1 au-dessus de QS, la seconde un angle droit QSX avec QS. Nous sommes alors ramenés au premier cas, ou cas général. Par suite, les deux droites considérées, suffisamment prolongées, se rencontreront au-dessus de QS ; mais, comme AQ ne saurait rencontrer TX sans couper d'abord la droite BS prolongée, nous en concluons que AQ et BS ont un point commun au-dessus de QS. C. Q. F. D.

*Remarque I.* Les perpendiculaires AQ et BS ont évidemment au-dessous de QS un second point d'intersection, symétrique du premier par rapport à AB. Elles renferment donc un espace. Il en est de même pour deux droites quelconques du plan. On trouvera pour ce second cas, qui est le cas général, une démonstration très claire dans les *Premiers principes de métageométrie* du professeur Mansion.

*Remarque II.* Si, dans le triangle rectangle ABD (fig. 2), nous supposons que les perpendiculaires ML, EI, FJ, GK...., ont été menées de

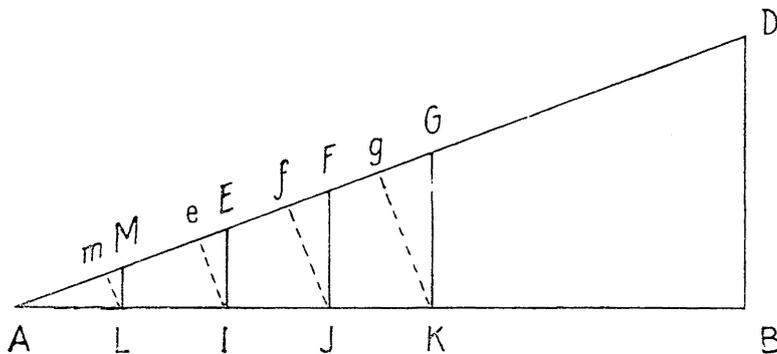


Fig. 2.

telle sorte que leurs pieds déterminent sur AB des segments égaux,  $AL = LI = IJ = JK = \dots$ , il sera facile de prouver que l'on a :

$$\frac{AL}{AM} < \frac{LI}{AE} < \frac{IJ}{AF} < \frac{JK}{AG} < \dots < \frac{AB}{AD}$$

Pour que tous les rapports qui précèdent  $\frac{AB}{AD}$  deviennent égaux à ce dernier, il faudra les rendre plus grands en diminuant leurs dénominateurs respectifs des quantités  $Mm, Ee, Ff, Gg, \dots$ , ou  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \dots$ , telles que l'on ait :

$$\frac{AL}{AM - \lambda_1} = \frac{LI}{AE - \lambda_2} = \frac{IJ}{AF - \lambda_3} = \frac{JK}{AG - \lambda_4} = \dots = \frac{AB}{AD}$$

Malgré cela, les triangles  $LAm, IAe, JAf, KAg, \dots$  ne seront ni semblables entre eux, ni semblables à  $BAD$  ; car les figures semblables n'existent pas dans les géométries non-euclidiennes (il faut cependant faire exception pour les polygones réguliers et pour les figures égales évidemment).

Edmond BORDAGE.

(St-Denis; Ile de la Réunion.)