C. Burali-Forti. — Lezioni di Geometria metrico-proiettiva. (Biblioteca matematica, vol. X.) —Un vol. gr. in-8°, 308 p.; prix : L. 8. —; Bocca frères, Turin, 1904.

Autor(en): **Alasia, C.**

Objekttyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1904)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

connaissances trop étendues en Analyse. M. Raffy en publiant la partie maîtresse de l'œuvre scientifique de Robin a rendu un véritable service à la Science. R. MARCOLONGO (Messine).

C. BURALI-FORTI. — **Lezioni di Geometria metrico-proiettiva.** (*Biblioteca matematica,* vol. X.) — Un vol. gr. in-8°, 308 p.; prix : L. 8. — ; Bocca frères, Turin, 1904.

Ce nouveau livre de M. le prof. Burali-Forti n'est pas une reproduction de l' « *Introduction à la Géométrie différentielle* » (Paris, 1897); en effet, celle-ci ne parlait qu'incidemment de la méthode de Grassmann et de ses applications à la Géométrie différentielle, tandis que le nouveau livre contient un exposé très complet de cette méthode et toutes les applications fondamentales à la Géométrie projective et à la Géométrie métrique. Mais l'ancien traité est encore très utile dans une première préparation : il peut servir comme introduction au traité plus complet que nous allons analyser.

Un avertissement est avant tout nécessaire : on ne doit pas croire que ce traité s'adresse seulement à ceux qui sont en possession de nombreuses connaissances mathématiques ; non, car il ne demande que la connaissance de la géométrie élémentaire, de l'algèbre, des premiers éléments du calcul différentiel. De plus l'auteur a voulu conserver aux propositions leur forme habituelle, ce qui contribue à faciliter la lecture du livre : il a dû faire une exception à propos des énoncés qui se rapportent à l'homographie (transformation projective), car il l'a considérée explicitement comme opération qui transforme les éléments d'une figure a dans ceux d'une figure b et non comme opération unique qui peut indifféremment s'appliquer à la première et deuxième figure.

Le livre se divise en *cinq parties*. Dans les deux premières on trouve les points fondamentaux de l'algorithme géométrique de Grassmann : après avoir étudiés les sommes et les produits de points et vecteurs, on en fait des applications à l'étude des coordonnées cartésiennes et polaires et à l'analyse de quelques-unes des courbes les plus importantes, sans excepter l'hélice circulaire et les courbes tracées sur le tore. L'étude des formations géométriques (qui permettent d'exprimer linéairement toute transformation par des transformations fixes) et de leurs coordonnées donne comme application la Géométrie analytique cartésienne, et son algorithme, consistant uniquement dans la recherche d'équations de points, droites, plans, lignes, surfaces, etc., quoique virtuellement contenu tout entier dans le livre, n'y reçoit aucune application, car la méthode de Grassmann permet d'introduire directement les *notions* géométriques dans les calculs.

La notion de position (*posit* a, notation qu'on doit lire *position* (positio) *de a*) permet (n° 43) de définir très simplement les éléments projectifs point, droite et plan. La loi de dualité énoncée sous une forme plus précise que d'ordinaire (49-51), découle directement des lois de dualité des formations, qui sont les suivantes :

Pour l'espace : de toute propriété des formations exprimable en les reliant uniquement par les opérations somme, produit par un nombre, produit progressif ou régressif, on conclut toujours une nouvelle propriété par le changement des F_1 dans[1] les F_3, des F_3 dans les F_1, laissant fixes les F_2 et F_4 (nombres).

---

[1] F_1, F_2, F_3, F_4, formes projectives de 1re, 2me, etc. espèce.

Pour le plan projectif: le principe de dualité dans le plan subsiste si on change les F_1 dans les F_3, les F_2 dans les F_1 et les F_3 (nombres) dans les F_3.

Pour les éléments projectifs : de toute propriété de position des éléments projectifs point, droite, plan, on peut déduire une nouvelle propriété par le changement de point en plan, de plan en point, de droite en droite, lorsque au lieu de dire *il passe par* on dira *il est sur*, et réciproquement.

Les homographies projectives dans les faisceaux et dans les ponctuelles sont traitées dans la troisième partie et on en fait un usage très remarquable dans l'exposition de la théorie projective et métrique des coniques propres, en obtenant une forme qui est sans doute plus simple que celle qu'on obtient lorsqu'on a recours aux méthodes ordinaires, analytiques et synthétiques. De la définition des faisceaux des F_1, F_2, F_3 on passe à l'étude des bi-rapports :

$$rapp\ u = rapp\ (u_1\,,\ u_2\,,\ u_3\,,\ u_4) = \frac{u_1\,u_3}{u_2\,u_3} \cdot \frac{u_2\,u_4}{u_1\,u_4}\,,$$

est le rapport anharmonique de la succession u, ou aussi le bi-rapport de la succession u qui est fonction de la position des formes u et qui peut prendre les valeurs 0, 1, ∞ lorsque seulement deux au moins de ses éléments ont même position. Lorsque on a $rapp\ u = -1$, la succession est harmonique. On peut remarquer que de cette manière le bi-rapport se trouve introduit comme notion générale, ce qui n'est pas indispensable, comme dans la Géométrie projective ordinaire. — Les homographies dans les faisceaux sont définies aux numéros (55-57) : l'opération σ qui transforme les éléments de U dans les éléments de U′, U et U′ étant deux faisceaux de formation, sera une transformation linéaire ou homographique lorsque seulement, les éléments a, b de U et le nombre m étant invariables, on aura toujours,

$$\sigma(a + b) = \sigma a + \sigma b\,, \quad \sigma(ma) = m(\sigma a)\,,$$

c'est-à-dire si l'opération est distributive par rapport à la somme et commutative par rapport au produit par un nombre.

L'homographie σ est renversable si $a'b' \neq o$, c'est-à-dire s'il est permis de considérer l'homographie σ^{-1}. L'homographie projective est caractérisée par le symbole *posit* σ, c'est-à-dire par le symbole d'une opération déterminée qui transforme les U dans les éléments de *posit* U′, U et U′ étant deux faisceaux de formations. $\lambda = posit\ \sigma$ est déterminée univoquement si σ est connu; mais quand au contraire λ est connu, il existe un nombre infini de solutions *posit* σ qui se déduisent l'une de l'autre par multiplication par un nombre.

Si a et b sont les éléments de U, tels que $ab \neq o$, alors, de quelque façon que l'on fixe les éléments p et q de U, on a toujours,

$$p(\sigma q) - q(\sigma p) = \frac{pq}{ab}\,[a(\sigma b) - b(\sigma a)]\,.$$

Si σ est renversable et a', b' sont des éléments de U′,

$$a'(\sigma^{-1} b') - b'(\sigma^{-1} a') = \frac{(\sigma^{-1} a')(\sigma^{-1} b')}{ab}\,[a(\sigma b) - b(\sigma a)]\,.$$

Si U et U′ sont des faisceaux de F_1 (ou de F_2), du même plan, ayant les supports (ou centres) distincts, alors,

$$posit\ [a(\sigma b) - b(\sigma a)]$$

est une droite (ou un point) qu'on nomme *axe* (ou *centre*) de collinéation de l'homographie σ et de son inverse, si elle existe. Les substitutions (58), la transformation de Steiner (59) conduisent à la construction de Steiner (60) fondée sur le théorème, « si λ est une correspondance de Steiner pour la circonférence Γ, si S est un point de Γ et l'opération σ est telle que, étant le point $P \neq S$ de Γ quelconque, on a σ [*posit* (SP)] $=$ *posit* [S (λP)], alors σ est une homographie projective renversable (qui transforme les rayons SP dans les rayons S (λP) qui fait correspondre à la tangente en S au cercle Γ la droite S (λS). Le théorème réciproque lui aussi est vrai.

De cette manière les homographies dans les faisceaux en font dériver des transformations linéaires dont on trouve la théorie complète aux numéros 100-105. Comme l'a montré aussi M. Carvallo, ces transformations donnent des remarquables applications dans la physique et dans la mécanique lorsqu'on a recours aux symboles de Grassmann. L'auteur se limite dans ce livre à n'en montrer que les applications à la Géométrie projective.

L'involution est considérée comme une substitution qui n'est pas un nombre, mais dont le carré est un nombre. La substitution σ qui n'est pas nulle est une involution sous la condition nécessaire et suffisante que si les éléments a, b du faisceau sont quelconques, on doit avoir toujours : $a(\sigma b) - b(\sigma a) = o$; donc il est aussi nécessaire et suffisant que l'invariant de σ soit nul. $\sigma^2 \lesseqgtr o$ exprime les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'involution σ soit elliptique (les éléments unis manquent), ou parabolique (*posit* σ a un élément uni), ou hyperbolique (*posit* σ a deux éléments unis).

L'étude des coniques (64-68) dépend directement de l'homographie dans les faisceaux, ce qui évite la discussion de l'équation générale du deuxième degré, analyse qu'on trouve dans tous les traités ordinaires de Géométrie analytique, et qui, au fond, n'a rien de géométrique.

Il y a lieu de mentionner le passage (65) de la construction par points à la construction par tangentes, ainsi que l'opération (qui substantiellement est une polarité) donnant le diamètre (67) et aussi la méthode pour obtenir l'équation générale des coniques proprement dites (67).

Dans la quatrième partie l'auteur pose d'abord la notion de limite. Suivant le formulaire de M. Peano, il indique par la notation $lim\ (f,\ u,\ x)$ la limite de la fonction f lorsque la variable, dans ses variations dans la classe u des nombres réels, se rapproche de x, élément de la classe dérivée de u. Si a est une F (fixe, constante), on a $lim\ (f,\ u,\ x) = a$ quand, quel que soit le produit K de 4-r points, on a toujours pour la fonction numérique Kf l'égalité $lim\ (kf, u, x) = ka$. Ainsi la définition de limite d'une formation variable se trouve ramenée à la définition d'une fonction numérique. Si f est un élément projectif (point, droite ou plan) et a est encore un élément projectif de même espèce, on aura $lim\ (f,\ u,\ x) = o$ quand il sera possible déterminer une formation géométrique f', fonction des u, telle que, *posit* $f'y = fy$, et aussi *posit* [$lim\ (f',\ u,\ x)$] $= a$, étant les y de u quelconques. Les deux symboles *posit* et *lim* sont commutatifs. La dérivée de f dans la classe u, pour la valeur x de la variable, est la limite de $(fy - fx)/(y - x)$, lorsque y dans ses variations en u, se rapproche de x. Si la dérivée d'une F_r existe, elle est toujours une F_r ; celle d'une constante est zéro; donc la dérivée d'un point propre est un vecteur ; la dérivée d'un vecteur, d'un bi-vecteur, d'un tri-vecteur est encore un vecteur, un bi-vecteur, un tri-vecteur. Les coordonnées de la dérivée sont les dérivées des coordonnées (car la dérivée d'une somme est somme des dérivées de ses termes) ; l'opération « dérivation » est commutative avec l'homographie. Ces principes et les développements qui en découlent sont tout de suite appliqués par l'auteur aux lignes et enveloppes de droites et de plans (71-78), aux surfaces réglées, aux enveloppes et *traiettories* des systèmes de lignes, aux surfaces en général, et toutes ces questions géométriques sont rapidement développées d'une manière très élégante et générale, montrant encore une fois la grande utilité qu'on retrouve à faire un vecteur du paramètre différentiel.

Les formules de Frenet (79-86), qu'on nomme ordinairement de Serret mènent sous forme vectorielle, tout directement à des importants résultats géométriques, particulièrement dans la théorie de l'hélice, où les démonstrations acquièrent une extrême simplicité. Comme on ne fait pas usage de coordonnées, les invariants disparaissent naturellement dans la théorie ordinaire des coniques (64-68, 114-120), des quadriques (121-125), des lignes de courbure, des géodésiques et asymptotiques (97-99). Le paramètre différentiel (95) est défini au chapitre cinq de cette même partie : Si u est un nombre, fonction d'un point propre variable P, et si le champ de P ne se réduit pas à une ligne ou à une surface, nous nommerons paramètre différentiel de u, et nous indiquerons par ∇u, le vecteur tel que $du = \nabla u \times dP$. » De cette manière le paramètre est introduit comme vecteur (Hamilton) et non comme nombre (Lamé), ce qui permet d'étudier plus simplement assez de questions géométriques dont les équations se réduisent à des expressions très élémentaires : on a, par exemple, $dP . dK = o$ comme équation différentielle des lignes de courbure ($K =$ vecteur unitaire, $PK =$ normale en P à la surface); on a $K. dP\, d^2P = o$ comme équation différentielle des géodésiques; $dP \times dK$ comme équation différentielle des lignes asymptotiques ; et la détermination des lignes de courbure d'une surface se fait (97) en recourant à une homographie de vecteurs au lieu de l'invariant différentiel quadratique. Pour donner un exemple de la simplicité qu'on retrouve dans les démonstrations, il suffira de reporter celle du théorème de Terquem : « Si une ligne commune à deux surfaces est ligne de courbure d'elles, alors les deux surfaces se coupent sous un angle constant le long de cette ligne. » « Au point P commun aux deux surfaces soient PK, PK_1 les normales : on a, $d(K \times K_1) = (dK) \times K_1 + (dK_1) \times K$. Si P est ligne de courbure des deux surfaces, alors dK, dK_1 sont parallèles à dP et normales à K et K_1, c'est-à-dire que $d(K \times K_1) = o$, ce qu'il fallait démontrer. »

L'usage du paramètre différentiel permet encore de traiter avec les géodésiques des surfaces (99) les questions analogues à celles qu'on a pour les droites sur le plan.

Dans la cinquième partie on retrouve développée d'une façon complète et dans un espace très petit, la théorie générale de l'homographie dans tous les systèmes projectifs. Les collinéations (106-113) fournissent les opérations qui ont une importance capitale dans la Géométrie projective. Toute homographie σ qui transforme F_1 en F_1 (substitution) est telle que 1°, il existe une F_1 W avec laquelle F_1 et sa correspondante, par rapport à σ sont colinéaires; 2°, l'homographie σ^{-1} transforme chaque F_1 en un multiple de W, est une collinéation. Si σ est une collinéation, il existe du moins une $F_1 W$ et une $F_3\Pi$ telles que, F_1P étant quelconque, on a toujours : $\sigma P = P + P\Pi . W$, ou bien, ce qui est le même, $\sigma P = (1 + W\Pi)P + PW.\Pi$.

Les collinéations donnent les homographies et les projectivités avec les théorèmes fondamentaux de la Géométrie descriptive et les polarités qui dans le plan conduisent à la théorie des coniques et dans l'espace à celle des quadriques.

L'homologie est définie en posant : *homologie = collinéation renversable*, et alors on a directement le théorème : homologie = collinéation à bi-rapport qui n'est pas nul. L'homologie σ est involutive si son carré est un nombre : pour $\lambda = posit\, \sigma$, λ est une involution projective : toute homologie différente de l'identité et qui a le centre propre et la base qui n'est pas entièrement à l'infini, est *propre*. Si son plan limite et celui de son inverse coïncident, elle est une homologie involutive.

L'affinité, l'homothétie, la congruence sont étudiées en posant, affinité = homologie à centre impropre et base propre ; homothétie = homologie à centre impropre et base à l'infini ; congruence = homologie à centre et base à l'infini.

Chaque homographie de la forme $(\sigma \mathbin{;} \alpha)$, où σ est une projection centrale (collinéation non renversable, c'est-à-dire à bi-rapport nul) et α une F_3 non nulle, et qui ne sort de *cent* σ, est appelée une projectivité. — L'étude des corrélations [homographies qui transforment les F_1 (ou F_3) d'un plan dans les F_2 (ou F_1) du même plan, ou bien qui transforment les F_2 (ou F_3) d'une étoile dans les F_3 (ou F_2) d'une étoile concentrique à la première] mènent à l'étude des polarités (114-124) dans le plan, dans l'étoile, dans l'espace, et cela sous une forme plus générale que celle qu'on obtient par les ordinaires polarités projectives qui sont plus compliquées et ne donnent rien de la partie géométrique ne pouvant s'occuper de ce qui se rapporte aux coordonnées usuelles. Les théorèmes de Desargues et Sturm y reçoivent une démonstration aussi simple qu'on peut le désirer, et l'étude de la fonction générale du deuxième ordre en dérive directement.

A la fin du volume sont des notes où l'on obtient sous forme élémentaire et en peu de lignes, quoique sans supprimer aucun développement, les surfaces de révolution à courbure (totale ou moyenne) constante, avec d'autres remarquables propriétés des trocoïdes à base rectiligne, dont l'examen est d'ordinaire très long et très difficile.

De l'aperçu des matières contenues dans ces *Lezioni*, il ressort que M. Burali-Forti se sert de la méthode géométrique de Grassmann non seulement comme d'instrument de démonstration, mais aussi comme moyen de recherche : et, il faut en convenir, elle s'y prête mieux que toutes les autres méthodes, à cause de son algorithme tout à fait semblable à celui de l'analyse ordinaire ; il opère directement sur les éléments géométriques, point, droite, plan, sans se servir des coordonnées, en substituant ainsi complètement aux invariants numériques les simples opérations géométriques et permettant d'étudier par un procédé unique et avec la même rigueur tant les propriétés métriques que celles projectives. Et pour mettre encore plus en évidence l'utilité de la méthode adoptée par M. Burali-Forti, il suffit de rappeler combien l'usage des coordonnées cartésiennes est malaisé dans l'étude des propriétés projectives et que, d'autre part, les coordonnées projectives ne se prêtent pas à l'étude des propriétés métriques, sans introduire les imaginaires en exprimant l'élément très simple « angle » comme le produit par $\sqrt{-1}$ du logarithme néperien d'un bi-rapport imaginaire. De plus l'algorithme de Grassmann contient comme des cas particuliers toutes les méthodes analytiques et graphiques : les coordonnées cartésiennes (13-15, 19-22), polaires (64) et projectives (25), les homographies (3e et 5e parties), les équipollences (de Bellavitis), les barycentriques (de Möbius), les quaternions (de Hamilton), etc.[1] — La Mécanique y trouve une préparation naturelle dans la théorie des formes (41), dans les opérations / et $\times$ (74, *c*) et la cinématique en résulte comme traitée implicitement (26-39, 84 trocoïdes).

Le livre a été écrit pour l'Académie militaire italienne, mais comme toute la théorie qu'il développe est fondée sur des notions élémentaires d'algèbre et de calcul différentiel, on peut aussi le recommander pour les cours universitaires où il représenterait un cours plus organique que celui qu'on y reçoit ordinairement, et particulièrement dans les cours des Facultés italiennes où l'enseignement de la Géométrie supérieure se trouve réparti, en donnant lieu à beaucoup de doubles emplois, sous des formes différentes dans les dénominations de Géométrie analytique, projective, descriptive, etc.

C. Alasia (Tempio, Sard.)

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Sommaires des principaux périodiques:

Annals of Mathematics, published under the Auspices of Harvard University. Cambridge, Mass., U. S. A. Second Series. Vol. 5.

October 1903. — A.-G. Greenhill : The Mathematical Theory of the Top. — P. Saurel : On Quadratic Forms. — E.-B. Wilson : A Generalized Conception of Area : Applications to Collineations in the Plane. — S. Woods : Lines of Curvature on Minimum Developables.

January 1904. — C. Arzela : Note on Series of Analytic Functions. — E.-P.-R. Duval : Graphs of the Functions II and Ψ. — A.-S. Gale : Examples of Non-applicable Surfaces having the same Gaussian Curvature at Corresp Points. — A.-G. Greenhill : The Mathematical Theory of the Top.

April 1904. — H.-A. Converse : On a system of Hypocycloïds of Class Three Inscribed to a Given 3-line, and some Curves Connected with it. — L.-E. Dickson : Determination of all Groups of Binary Linear Substitutions wirth Integral Coefficients taken Modulo 3 and of Determinant Unity. — E.-B. Wilson : Projective and Metric Geometry. — G.-H. Ling : A Geometric Discussion of the Abs. Convergence of a Series with Complex Terms.

Archiv der Mathematik und Physik, herausgegeben von E. Lampe, W. Meyer, E. Jahnke. 7. Band ; B.-G. Teubner, Leipzig und Berlin.

Heft 1-2. — Fr. Meyer : Über den Ptolemäischen Satz. — H. Stahl : Bemerkungen zur Theorie der Abelschen Funktionen. — S. Haller : Untersuchung der Brennpunktskurve eines Kegelschnittbüschels mit besonderer

[1] Cfr. *Formulaire de Mathématique* de M. Peano, — édition de 1901-1903, pag. 349.