

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 10 (1908)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Kapitel: Sur les sommes de sinus et de cosinus dont les arguments sont en progression arithmétique.

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 18.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

bien flou, et cela est très gênant. Cette phrase : « Les axiomes viennent de l'expérience » n'a pas un sens net, il me serait facile de le montrer, mais cela m'entraînerait trop loin. C'est une raison, et il y en a bien d'autres, pour être très modéré dans les discussions philosophiques et pour ne pas avoir peur de changer d'avis. Il faudrait trouver un moyen d'exprimer sa pensée d'une façon bien nette, sans ambiguïté. Je ne désespère pas d'y arriver, mais je n'y suis pas encore complètement parvenu en ce qui concerne la question des axiomes.

J. RICHARD (Dijon).

3. RÉPLIQUE DE M. COMBEBIAC.

Ainsi que le fait remarquer M. Richard, il est fort difficile de s'entendre sur certaines questions parce que les mots n'ont que la signification que chacun leur donne. Je crois toutefois pouvoir constater notre accord sur les deux points essentiels, savoir : 1° les mêmes lignes ne peuvent pas servir d'axes à une métrique hyperbolique et à une métrique parabolique ; 2° les difficultés incontestablement fort délicates que soulève la question des relations de la Géométrie et de l'expérience sont du même ordre que celles que l'on rencontre pour les diverses branches de la physique, de sorte que l'on se trouve ramené à la grosse question du réalisme *scientifique* et non plus *géométrique*.

Sur les sommes de sinus et de cosinus dont les arguments sont en progression arithmétique.

Ces sommes donnent lieu à d'intéressants exercices de transformations dans les applications de la formule de Moivre. En raison du rôle qu'elles jouent dans les Mathématiques supérieures, leur sommation mérite d'être examinée, à titre d'exercice déjà dans les éléments.

Posons

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} \cos (\alpha + k\beta) , \quad B = \sum_{k=0}^{n-1} \sin (\alpha + k\beta)$$

et formons la somme

$$A + Bi = \sum_{k=0}^{n-1} \{ \cos (\alpha + k\beta) + i \sin (\alpha + k\beta) \} .$$

Cette expression peut se transformer successivement comme suit :

$$A + Bi = (\cos \alpha + i \sin \alpha) \sum_{k=0}^{n-1} \{ \cos k\beta + i \sin k\beta \}$$

$$\begin{aligned}
&= (\cos \alpha + i \sin \alpha) \sum_{k=0}^{n-1} (\cos \beta + i \sin \beta)^k \\
&= (\cos \alpha + i \sin \alpha) \frac{1 - (\cos \beta + i \sin \beta)^n}{1 - (\cos \beta + i \sin \beta)} \\
&= (\cos \alpha + i \sin \alpha) \frac{1 - (\cos n\beta + i \sin n\beta)}{1 - (\cos \beta + i \sin \beta)} \\
&= (\cos \alpha + i \sin \alpha) \frac{2 \sin^2 \frac{n\beta}{2} - 2i \sin \frac{n\beta}{2} \cos \frac{n\beta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\beta}{2} - 2i \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}} \\
&= (\cos \alpha + i \sin \alpha) \frac{\sin \frac{n\beta}{2} - i \cos \frac{n\beta}{2} \sin \frac{n\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} - i \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2}}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
&= (\cos \alpha + i \sin \alpha) \frac{\cos \frac{n\beta}{2} + i \sin \frac{n\beta}{2} \sin \frac{n\beta}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} + i \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2}} \\
&= \left\{ \cos \left(\alpha + \frac{n\beta}{2} - \frac{\beta}{2} \right) + i \sin \left(\alpha + \frac{n\beta}{2} - \frac{\beta}{2} \right) \right\} \frac{\sin \frac{n\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \\
&= \left\{ \cos \left(\alpha + \frac{(n-1)\beta}{2} \right) + i \sin \left(\alpha + \frac{(n-1)\beta}{2} \right) \right\} \frac{\sin \frac{n\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\left. \begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \cos (\alpha + k\beta) &= \frac{\cos \left(\alpha + \frac{(n-1)\beta}{2} \right) \sin \frac{n\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}, \\
\sum_{k=0}^{n-1} \sin (\alpha + k\beta) &= \frac{\sin \left(\alpha + \frac{(n-1)\beta}{2} \right) \sin \frac{n\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}.
\end{aligned} \right\}$$