SUR LA FORMULE DE TAYLOR

SUR LA FORMULE DE TAYLOR

Je me propose, dans cette note, de déterminer une expression du reste dans la formule de Taylor, dont on déduit en même temps le reste de Lagrange et l'interprétation de la formule comme série asymptotique.

Soit $f(x)$ une fonction réelle de la variable réelle x, définie dans un intervalle de a à b, et qui a les dérivées d'ordres 1, 2, ... $n-1$ dans tout l'intervalle considéré. Alors on a

$$
\begin{aligned}
&f(b) - \left[f(a) + (b-a)\,\mathrm{D}f(a) + \ldots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{D}^{n-1}f(a)\right] \\
(1)\qquad &= \frac{(b-a)^n}{n!}\,\frac{\mathrm{D}^{n-1}f(u) - \mathrm{D}^{n-1}f(a)}{u-a}
\end{aligned}
$$

où u est une valeur (inconnue) appartenant à l'intervalle de a à b.

Il est digne de remarque qu'on ne suppose pas même l'existence de la dérivée d'ordre n.

Dem. En effet, soit k la quantité définie par l'équation

$$
f(b) - \left[f(a) + (b-a)\,\mathrm{D}f(a) + \ldots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{D}^{n-1}f(a)\right] = (b-a)^n k,
$$

et considérons la fonction $g(x)$ définie par :

$$
g(x) = f(x) - \left[f(a) + (x-a)\,\mathrm{D}f(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{D}^{n-1}f(a)\right] - (x-a)^n k.
$$

Cette fonction est nulle pour $x=a$ et pour $x=b$, de plus ses dérivées d'ordres 1, 2, ... $n-2$ s'annulent pour $x=a$.

En appliquant le théorème de Rolle à la fonction $g(x)$, nous saurons qu'il existe une valeur u appartenant à l'intervalle de a à b qui annule la dérivée du premier ordre. Mais cette dérivée est nulle aussi pour $x=a$, donc, par le même théorème, il existe une valeur appartenant à l'intervalle de a à b qui annule la dérivée d'ordre 2 ; etc.

En continuant de cette manière on déduit qu'il existe une valeur u de l'intervalle de a à b telle que la dérivée d'ordre $n - 1$ est nulle :

$$D^{n-1} g(u) = 0 .$$

En substituant l'expression de cette dérivée on a :

$$D^{n-1} f(u) - D^{n-1} f(a) - n! (u - a) k = 0$$

d'où résulte enfin :

$$k = \frac{1}{n!} \frac{D^{n-1} f(u) - D^{n-1} f(a)}{u - a}$$

où u est une valeur de l'intervalle considéré. Ainsi le théorème est démontré.

Maintenant, si l'on suppose l'existence de la dérivée d'ordre n dans l'intervalle de a à b, par le théorème de la valeur moyenne on a :

$$\frac{D^{n-1} f(u) - D^{n-1} f(a)}{u - a} = D^n f(v) ,$$

où v est une valeur entre a et u, et par conséquent entre a et b ; ainsi résulte l'expression du reste donnée par Lagrange :

$$\begin{aligned} f(b) = f(a) + (b - a) Df(a) + \ldots + \frac{(b - a)^{n-1}}{(n - 1)!} D^{n-1} f(a) + \\ \frac{(b - a)^n}{n!} D^n f(v) \end{aligned} \tag{2}$$

où v est une valeur entre a et b.

Si dans (1) on conserve a fixe, et si l'on fait tendre b vers a, la quantité intermédiaire u tend aussi vers a, et en supposant l'existence de la dérivée $D^n f(a)$, par la valeur a, par la définition de la dérivée :

$$\lim \frac{D^{n-1} f(u) - D^{n-1} f(a)}{u - a} = D^n f(a) .$$

Si l'on pose $b = a + h$, et l'on passe à la limite pour

$h = 0$, après avoir divisé (1) par $(b - a)^n$, on déduit la formule asymptotique :

$$\lim_{h=0} \frac{f(a+h) - f(a) - \ldots - \dfrac{h^{n-1}}{(n-1)!} D^{n-1} f(a)}{h^n} = \frac{D^n f(a)}{n!}, \tag{3}$$

qui subsiste en supposant seulement l'existence des quantités qui y figurent, c'est-à-dire de la dérivée d'ordre n de f pour la valeur a de la variable. Il n'est pas nécessaire de supposer son existence ni la continuité dans les environs de a. Presque tous les auteurs déduisent la formule (3) qui est nécessaire dans la théorie des maxima et minima, du plan osculateur, etc., de la formule (2) de Lagrange. En effet

$$\lim_{h=0} \frac{f(a+h) - \ldots - \dfrac{h^{n-1}}{(n-1)!} D^{n-1} f(a)}{h^n} = \lim_{h=0} \frac{D^n f(a + \vartheta h)}{n!} = \frac{D^n f(a)}{n!}$$

en supposant l'existence et la continuité de la dérivée d'ordre n, dans les environs de la valeur a, ce qui n'est pas nécessaire.

La formule (3) ou le développement asymptotique de la formule de Taylor est connue (voir par exemple le *Formulaire Math. de* G. PEANO, éd. V, p. 298), mais je crois que la déduction au moyen de la formule (1) est nouvelle.

Margherita PEYROLERI (Turin).