

# SUR LA DÉTERMINATION DU TAUX DANS LE PROBLÈME DES ANNUITÉS

Autor(en): **Barbette, E.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1909)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-11865>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Mais quant à le définir, cela me paraît bien difficile ; il ne saurait être organisé à notre image, il ne nous est donc pas possible de le concevoir.

*Conclusion.* — En étudiant les conquêtes de l'esprit humain, il semble qu'il y aurait un moyen de raisonner sur les questions qui divisent le plus les hommes ; ce serait de ne rien affirmer *a priori*, de ne pas poser d'axiomes car nous ne sommes, hélas, sûrs de rien, si ce n'est que nous éprouvons des sensations dont nous avons toujours ignoré les causes.

Sans rien affirmer on ferait des hypothèses pour en tirer des conclusions. Auraient raison alors ceux qui de leurs hypothèses auraient su tirer le plus grand nombre de conclusions remarquables, utiles et non contradictoires.

Ne semble-t-il pas maintenant que, avant d'aborder l'étude de la philosophie, il est nécessaire d'avoir parcouru le cycle des connaissances humaines pour profiter de tous les renseignements que peuvent fournir les sciences et s'être assimilé les méthodes employées pour découvrir la vérité ?

---

## SUR LA DÉTERMINATION DU TAUX DANS LE PROBLÈME DES ANNUITÉS

---

De la formule

$$a = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

dans laquelle  $a$  représente l'annuité à payer pendant  $n$  années pour amortir un emprunt  $A$  au taux de  $r$  pour un franc, en posant  $\frac{A}{a} = \alpha$ , on déduit :

$$(1 - \alpha r)(1 + r)^n = 1. \quad (1)$$

Si  $n = 1$ , cette relation devient

$$(1 - \alpha r)(1 + r) = 1 \quad \text{d'où} \quad r = \frac{1 - \alpha}{\alpha}.$$

Si  $n = 2$ , l'équation (1) devient

$$(1 - \alpha r)(1 + r)^2 = 1$$

$$\alpha r^2 + (2\alpha - 1)r - (2 - \alpha) = 0$$

d'où

$$r = \frac{-2\alpha + 1 + \sqrt{4\alpha + 1}}{2\alpha}.$$

Si  $n > 2^1$ , posons

$$r = \frac{h}{1 - h}, \quad \text{d'où} \quad h = \frac{r}{1 + r}$$

en sorte que  $r$  et  $h$  croissent ou décroissent en même temps.

L'équation (1) devient successivement :

$$\left(1 - \alpha \frac{h}{1 - h}\right) \left(1 + \frac{h}{1 - h}\right)^n = 1,$$

$$1 - (\alpha + 1) \cdot h = (1 - h)^{n+1},$$

$$1 - (\alpha + 1) \cdot h = 1 - \frac{n+1}{1} \cdot h + \frac{(n+1)}{1} \cdot \frac{n}{2} \cdot h^2 - \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{3} \cdot h^3 \\ + \dots + (-1)^{n+1} \cdot h^{n+1},$$

$$\frac{n+1}{1} \cdot \frac{n}{2} \cdot h = (n - \alpha) + \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{3} \cdot h^2$$

$$- \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n-2}{4} \cdot h^3 + \dots - (-1)^{n+1} \cdot h^n,$$

$$h = \frac{2(n - \alpha)}{(n+1)n} + \frac{n-1}{3} \cdot h^2 - \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n-2}{4} \cdot h^3$$

$$+ \dots - \frac{2(-1)^{n+1}}{(n+1)n} \cdot h^n;$$

<sup>1</sup> De l'équation (1), nous pourrions déduire une limite supérieure et une limite inférieure de  $r$ , malheureusement trop éloignées, en observant que

$$1 - \alpha r > 0 \quad \text{et} \quad (1 - \alpha r)(1 + nr) < 1$$

d'où

$$r < \frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad r > \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{n}.$$

d'où en représentant la constante  $\frac{2(n-\alpha)}{(n+1)n}$  par  $h_1$  :

$$h - h_1 = \frac{n-1}{3} \cdot h^2 - \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n-2}{4} \cdot h^3 + \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n-2}{4} \cdot \frac{n-3}{5} \cdot h^4 - \dots - \frac{2(-1)^{n+1}}{(n+1)n} \cdot h^n \quad (2)$$

Observons que, dans le second membre de cette égalité, le  $s^{\text{ième}}$  terme  $T_s$  égale le précédent  $T_{s-1}$  multiplié par  $-\frac{n-s}{s+2} \cdot h$ ; par suite un terme, considéré en valeur absolue, sera moindre que le précédent tant que nous aurons

$$\frac{n-s}{s+2} \cdot h < 1 \quad \text{ou} \quad \frac{n-s}{s+2} \cdot \frac{r}{1+r} < 1$$

c'est-à-dire,

$$n < \frac{s+2}{r} + 2(s+1) \quad \text{ou} \quad n < \frac{100(s+2)}{100r} + 2(s+1).$$

Quand cette condition sera vérifiée, en s'arrêtant dans l'évaluation de  $h$  à un terme de rang quelconque de la suite (2), l'erreur commise sera moindre que le premier terme négligé, pris en valeur absolue.

Le tableau suivant, à double entrée, donne une limite supérieure de  $n$  pour des valeurs de  $r$  variant de 0,01 à 0,14 et des valeurs de  $s$  variant de 1 à 10. Nous avons indiqué, en caractères gras, la limite de  $n$  immédiatement supérieure au nombre 100.

Pour obtenir la raison  $\delta$  des valeurs de  $n$  suivant une même ligne horizontale du tableau, observons qu'elle est la différence entre deux limites consécutives de  $n$  pour une valeur constante de  $r$ ; elle est donc

$$\begin{aligned} \delta &= \left\{ \frac{100(s+1) + 200}{100r} + 2(s+2) \right\} - \left\{ \frac{100s + 200}{100r} + 2(s+1) \right\} \\ &= \frac{100}{100r} + 2 \quad \text{ou} \quad \frac{100 + 200r}{100r}. \end{aligned}$$

$\delta = \frac{100 + 200r}{100r}$	Valeur de $r$ .	$s=1$ $n < \frac{300}{100r} + 4$	$s=2$ $n < \frac{400}{100r} + 6$	$s=3$ $n < \frac{500}{100r} + 8$	$s=4$ $n < \frac{600}{100r} + 10$	$s=5$ $n < \frac{700}{100r} + 12$	$s=6$ $n < \frac{800}{100r} + 14$	$s=7$ $n < \frac{900}{100r} + 16$	$s=8$ $n < \frac{1000}{100r} + 18$	$s=9$ $n < \frac{1100}{100r} + 20$	$s=10$ $n < \frac{1200}{100r} + 22$
102	0,01	304	406	508	610	712	814	916	1018	1120	1222
52	0,02	154	206	258	310	362	414	466	518	570	622
$35\frac{1}{3}$	0,03	104	$139\frac{1}{3}$	$174\frac{2}{3}$	210	$245\frac{1}{3}$	$280\frac{2}{3}$	316	$351\frac{1}{3}$	$386\frac{2}{3}$	422
27	0,04	79	106	133	160	187	214	241	268	295	322
22	0,05	64	86	108	130	152	174	196	218	240	262
$18\frac{2}{3}$	0,06	54	$72\frac{2}{3}$	$91\frac{1}{3}$	110	$128\frac{2}{3}$	$147\frac{1}{3}$	166	$184\frac{2}{3}$	$203\frac{1}{3}$	222
$16\frac{2}{7}$	0,07	$46\frac{6}{7}$	$63\frac{1}{7}$	$79\frac{3}{7}$	$95\frac{5}{7}$	112	$128\frac{2}{7}$	$144\frac{4}{7}$	$160\frac{6}{7}$	$177\frac{1}{7}$	$193\frac{3}{7}$
$14\frac{1}{2}$	0,08	$41\frac{1}{2}$	56	$70\frac{1}{2}$	85	$99\frac{1}{2}$	114	$128\frac{1}{2}$	143	$157\frac{1}{2}$	172
$13\frac{1}{9}$	0,09	$37\frac{3}{9}$	$50\frac{4}{9}$	$63\frac{5}{9}$	$76\frac{6}{9}$	$89\frac{7}{9}$	$102\frac{8}{9}$	116	$129\frac{1}{9}$	$142\frac{2}{9}$	$155\frac{3}{9}$
12	0,10	34	46	58	70	82	94	106	118	130	142
$11\frac{1}{11}$	0,11	$31\frac{3}{11}$	$42\frac{4}{11}$	$53\frac{5}{11}$	$64\frac{6}{11}$	$75\frac{7}{11}$	$86\frac{8}{11}$	$97\frac{9}{11}$	$108\frac{10}{11}$	120	$131\frac{1}{11}$
$10\frac{1}{3}$	0,12	29	$39\frac{1}{3}$	$49\frac{2}{3}$	60	$70\frac{1}{3}$	$80\frac{2}{3}$	91	$101\frac{1}{3}$	$111\frac{2}{3}$	122
$9\frac{9}{13}$	0,13	$27\frac{1}{13}$	$36\frac{10}{13}$	$46\frac{6}{13}$	$56\frac{2}{13}$	$65\frac{11}{13}$	$75\frac{7}{13}$	$85\frac{3}{13}$	$94\frac{12}{13}$	104	$114\frac{4}{13}$
$9\frac{1}{7}$	0,14	$25\frac{3}{7}$	$34\frac{4}{7}$	$43\frac{5}{7}$	$52\frac{6}{7}$	62	$71\frac{1}{7}$	$80\frac{2}{7}$	$89\frac{3}{7}$	$98\frac{4}{7}$	107

Afin de bien saisir l'importance de ce tableau, observons par exemple, que si  $r = 0,04$ , les termes de la suite (2) iront en décroissant : à partir du 1<sup>er</sup> terme si  $n < 79$  ; à partir du 2<sup>me</sup> si  $79 \leq n < 106$  ; à partir du 3<sup>me</sup> si  $106 \leq n < 133$  ; et ainsi de suite. Ou encore, si  $n = 100$  et si, dans les calculs, nous constatons que les termes de la suite (2) vont en décroissant à partir du 1<sup>er</sup> terme, c'est que  $r < 0,04$  ; si ces termes vont en décroissant à partir du 2<sup>me</sup>, c'est que  $0,04 \leq r < 0,05$  ; s'ils vont en décroissant à partir du 3<sup>me</sup>, c'est que  $0,05 \leq r < 0,06$  ; et ainsi de suite.

*Valeurs approximatives de h et de r.* De la relation (2), nous déduisons successivement des valeurs de plus en plus approchées de  $h$  et par suite, de  $r$  :

$$h_1 = \frac{2(n-\alpha)}{(n+1)n} \quad ; \quad r_1 = \frac{h_1}{1-h_1}$$

$$h_2 = h_1 + \frac{n-1}{3} \cdot h_1^2 - \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n-2}{4} \cdot h_1^3 + \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n-2}{4} \cdot \frac{n-3}{5} \cdot h_1^4 - \dots ; \quad r_2 = \frac{h_2}{1-h_2}$$

$$h_3 = h_1 + \frac{n-1}{3} \cdot h_2^2 - \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n-2}{4} \cdot h_2^3 + \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n-2}{4} \cdot \frac{n-3}{5} \cdot h_2^4 - \dots ; \quad r_3 = \frac{h_3}{1-h_3}$$

$$h_{p+1} = h_1 + \frac{n-1}{3} \cdot h_p^2 - \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n-2}{4} \cdot h_p^3 + \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n-2}{4} \cdot \frac{n-3}{5} \cdot h_p^4 - \dots ; \quad r_{p+1} = \frac{h_{p+1}}{1-h_{p+1}}$$

Représentons par

$$h_{p+1,1} = h_1 + \frac{n-1}{3} \cdot h_p^2$$

$$h_{p+1,2} = h_1 + \frac{n-1}{3} \cdot h_p^2 - \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n-2}{4} \cdot h_p^3$$

$$h_{p+1,3} = h_1 + \frac{n-1}{3} \cdot h_p^2 - \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n-2}{4} \cdot h_p^3 + \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n-2}{4} \cdot \frac{n-3}{5} \cdot h_p^4$$

$$h_{p+1,q} = h_1 + \frac{n-1}{3} \cdot h_p^2 - \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n-2}{4} \cdot h_p^3 + \dots$$

$$+ (-1)^{q+1} \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n-2}{4} \dots \frac{n-q}{q+2} \cdot h_p^{q+1}$$

les approximations successives de  $h_{p+1}$ .

La valeur de  $h_1$  étant déterminée, calculons  $h_{2,2q_1-1}$  et  $h_{2,2q_1}$  de manière que la différence  $(h_{2,2q_1-1} - h_{2,2q_1})$  soit suffisamment petite, par exemple moindre que 0,0001 ; puis cherchons dans les mêmes conditions  $h_{3,2q_2-1}$  et  $h_{3,2q_2}$ ,  $h_{4,2q_3-1}$  et  $h_{4,2q_3}$ , ... en remplaçant dans  $h_3$  le nombre  $h_2$  par  $h_{2,2q_1}$  (valeur moindre que  $h_2$ ), dans  $h_4$  le nombre  $h_3$  par  $h_{3,2q_2}$  (valeur moindre que  $h_3$ ), ... ; il s'ensuit que les valeurs approximatives de  $r$  de rang impair

$$r_{2,2q_1-1}, r_{3,2q_2-1}, r_{4,2q_3-1}, \dots, r_{p+1,2q_p-1}, \dots \quad (3)$$

sont respectivement plus grandes que

$$r_2, r_3, r_4, \dots, r_{p+1}, \dots$$

tandis que les valeurs approximatives de  $r$  de rang pair

$$r_{2,2q_1}, r_{3,2q_2}, r_{4,2q_3}, \dots, r_{p+1,2q_p}, \dots \quad (4)$$

sont respectivement plus petites que

$$r_2, r_3, r_4, \dots, r_{p+1}, \dots$$

Les suites (3) et (4) satisfont aux trois conditions ci-après :

- 1° Les deux suites sont croissantes ;
- 2° Les différences  $(r_{p+1,2q_p-1} - r_{p,2q_{p-1}})$  et  $(r_{p+1,2q_p} - r_{p,2q_{p-1}})$ , pour  $p$  croissant, deviennent de plus en plus petites ;

3° Les nombres  $r_{p+1,2q_p-1}$  et  $r_{p+1,2q_p}$ , qui comprennent  $r_{p+1}$ , sont tels que leur différence  $(r_{p+1,2q_p-1} - r_{p+1,2q_p})$  peut devenir moindre et rester moindre que tout nombre positif donné, si petit soit-il.

**THÉORÈME.** *Si la première suite a pour limite  $r$ , la seconde a la même limite.*

En effet

$$r - r_{p+1,2q_p} = (r_{p+1,2q_{p-1}} - r_{p+1,2q_p}) - (r_{p+1,2q_{p-1}} - r)$$

Or limite  $(r_{p+1,2q_p-1} - r_{p+1,2q_p}) = 0$  en vertu de la troi-

sième condition de convergence et limite  $(r_{p+1, 2q_p-1} - r) = 0$  par hypothèse ; par suite

$$\text{limite } (r - r_{p+1, 2q_p}) = 0 .$$

*Observation.* Du théorème qui précède, nous déduisons que la détermination de l'une des deux suites, de la première par exemple, permet de calculer  $r$  très approximativement : lorsque l'une des différences  $(r_{p+1, 2q_p-1} - r_{p, 2q_p-1})$  sera moindre que 0,0001, le nombre  $r_{p, 2q_p-1}$  représentera, à fort peu près, la valeur de  $r$  ; si cette différence dépasse 0,0001 de très peu, le nombre  $r_{p+1, 2q_p-1}$  donnera la valeur de  $r$ . Cette valeur pourra s'obtenir de deux façons, soit en prenant  $q + 1 = n$ , soit en prenant  $q + 1 < n$ .

A. — DANS LE PREMIER CAS,  $q + 1 = n$  : nous calculerons pour  $p = 1$ ,  $p = 2$ ,  $p = 3$ , ... les valeurs de  $h_{p+1, n-1}$  et nous en déduirons celles de  $r_{p+1, n-1}$ .

*Exemple.* On donne  $n = 4$  et  $\alpha = \frac{A}{a} = 3,7170984$ .

Par suite

$$h = h_1 + h^2 - \frac{1}{2} h^3 + \frac{1}{10} h^4 .$$

$$1^\circ \quad h_1 = \frac{2(n - \alpha)}{(n + 1)n} = 0,0282902 ; \quad \text{d'où} \quad r_1 = 0,02911 .$$

$$2^\circ \quad h_2 = h_1 + h_1^2 - \frac{1}{2} h_1^3 + \frac{1}{10} h_1^4 .$$

$$h_{2,1} = h_1 + h_1^2 = 0,0282902 + 0,0007980 = 0,0290882 ;$$

$$h_{2,2} = h_{2,1} - \frac{1}{2} h_1^3 = 0,0290882 - 0,0000112 = 0,0290770 ;$$

$$h_{2,3} = h_{2,2} + \frac{1}{10} h_1^4 = 0,0290770 + 0,0000006 = 0,0290776 ;$$

$$r_{2,3} = \frac{h_{2,3}}{1 - h_{2,3}} = \frac{0,0290776}{0,9709224} = 0,02994 .$$



$$3^{\circ} \quad h_3 = h_1 + h_2^2 - \frac{1}{2} h_2^3 + \frac{1}{10} h_2^4.$$

$$h_{3,1} = h_1 + h_2^2 = 0,0282902 + 0,0008455 = 0,0291357 ;$$

$$h_{3,2} = h_{3,1} - \frac{1}{2} h_2^3 = 0,0291357 - 0,0000122 = 0,0291235 ;$$

$$h_{3,3} = h_{3,2} + \frac{1}{10} h_2^4 = 0,0291235 + 0,0000007 = 0,0291242 ;$$

$$r_{3,3} = \frac{h_{3,3}}{1 - h_{3,3}} = \frac{0,0291242}{0,9708758} = 0,02999 .$$

Or

$$r_{2,3} - r_{2,3} = 0,00005 < 0,0001 ;$$

par suite

$$r = 0,0299 = 0,03 \text{ environ} .$$

THÉOREME. Considérons la somme

$$s_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots \mp a_{n-1} \pm a_n$$

à termes alternativement positifs et négatifs, en sorte que

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 - a_2$$

$$s_3 = a_1 - a_2 + a_3$$

$$s_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4$$

$$\dots \dots \dots$$

$$s_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots \mp a_{n-1} \pm a_n .$$

Ajoutons

$$\sum_1^n s_i = a_1 \cdot n - a_2 \cdot (n-1) + a_3 \cdot (n-2) - a_4 \cdot (n-3) + \dots \\ \mp a_{n-1} \cdot 2 \pm a_n \cdot 1$$

puis divisons par  $n$  :

$$\frac{\sum_1^n s_i}{n} = a_1 - a_2 \cdot \frac{n-1}{n} + a_3 \cdot \frac{n-2}{n} - a_4 \cdot \frac{n-3}{n} + \dots \\ \mp a_{n-1} \cdot \frac{2}{n} \pm a_n \cdot \frac{1}{n} .$$

Il s'ensuit que

$$s_n - \frac{\sum_{i=1}^n s_i}{n} = -a_2 \cdot \frac{1}{n} + a_3 \cdot \frac{2}{n} - a_4 \cdot \frac{3}{n} + \dots \\ \mp a_{n-1} \cdot \frac{n-2}{n} \pm a_n \cdot \frac{n-1}{n}$$

et

$$s_n = \frac{\sum_{i=1}^n s_i}{n} - a_2 \cdot \frac{1}{n} + a_3 \cdot \frac{2}{n} - a_4 \cdot \frac{3}{n} + \dots \\ \mp a_{n-1} \cdot \frac{n-2}{n} \pm a_n \cdot \frac{n-1}{n}.$$

Par conséquent, si

$$a_2 \cdot \frac{1}{n} > a_3 \cdot \frac{2}{n} > a_4 \cdot \frac{3}{n} > \dots > a_{n-1} \cdot \frac{n-2}{n} > a_n \cdot \frac{n-1}{n}$$

ou

$$a_2 \cdot 1 > a_3 \cdot 2 > a_4 \cdot 3 > \dots > a_{n-1} \cdot (n-2) > a_n \cdot (n-1)$$

en prenant

$$s_n = \frac{\sum_{i=1}^n s_i}{n},$$

l'erreur commise sera moindre que

$$a_2 \cdot \frac{1}{n}.$$

*Observation.* Ce théorème sera applicable au calcul de  $h$  tant que nous aurons

$$T_{s-1} \cdot (s-2) > T_s \cdot (s-1)$$

ou

$$T_{s-1} \cdot (s-2) > T_{s-1} \cdot \frac{n-s}{s+2} h \cdot (s-1)$$

$$h < \frac{s-2}{s-1} \cdot \frac{s+2}{n-s}$$

$$\frac{r}{1+r} < \frac{s-2}{s-1} \cdot \frac{s+2}{n-s}$$

d'où

$$n < \frac{(s^2 - 4) 100}{(s - 1) 100 r} + \frac{2s^2 - s - 4}{s - 1}.$$

Dans le problème qui précède :

Si nous prenons

$$h_2 = \frac{h_{2.1} + h_{2.2} + h_{2.3}}{3} = 0,0290809$$

L'erreur commise est moindre que  $\frac{0,0000112}{3} = 0,0000037 \dots$  et a fortiori, moindre que 0,00001. Par suite

$$r_2 = \frac{h_2}{1 - h_2} = \frac{0,02908}{0,97092} = 0,02995.$$

Si nous prenons

$$h_3 = \frac{h_{3.1} + h_{3.2} + h_{3.3}}{3} = 0,0291278$$

L'erreur commise est moindre que  $\frac{0,0000122}{3} = 0,0000040 \dots$  et a fortiori, moindre que 0,00001. Par suite

$$r_3 = \frac{0,02912}{0,97088} = 0,02999.$$

Or  $r_3 - r_2 = 0,00004 < 0,0001$  ; nous pouvons donc prendre  $r = 0,0299 = 0,03$  environ .

B. — DANS LE SECOND CAS,  $q + 1 < n$  : nous suivrons la méthode générale précédemment exposée.

*Exemple.* On donne  $n = 25$  et  $\alpha = \frac{A}{a} = 15,6220799$  .

Par suite

$$h = h_1 + 8 h^2 - 46 h^3 + 202,4 h^4 - 708,4 h^5 + 2024 h^6 - 4807 h^7 + \dots$$

$$1^\circ \quad h_1 = \frac{2(n - \alpha)}{(n + 1)n} = 0,0288551 ;$$

d'où

$$r_1 = 0,02971 .$$

$$2^{\circ} \quad h_2 = h_1 + 8 h_1^2 - 46 h_1^3 + 202,4 h_1^4 - 708,4 h_1^5 + \dots$$

$$h_{2,1} = h_1 + 8 h_1^2 = 0,0288551 + 0,0066609 = 0,0355160 ;$$

$$h_{2,2} = h_{2,1} - 46 h_1^3 = 0,0355160 - 0,0011051 = 0,0344109 ;$$

$$h_{2,3} = h_{2,2} + 202,4 h_1^4 = 0,0344109 + 0,0001403 = 0,0345512 ;$$

$$h_{2,4} = h_{2,3} - 708,4 h_1^5 = 0,0345512 - 0,0000141 = 0,0345371 ;$$

Observons que  $h_{2,3}$  et  $h_{2,4}$  diffèrent de moins de 0,0001 et prenons  $r_{2,3}$  pour valeur de  $r_2$  :

$$r_{2,3} = \frac{h_{2,3}}{1 - h_{2,3}} = \frac{0,0345512}{0,9654488} = 0,03579 .$$

$$3^{\circ} \quad h_3 = h_1 + 8 h_2^2 - 46 h_2^3 + 202,4 h_2^4 - 708,4 h_2^5 + \dots$$

$$h_{3,1} = h_1 + 8 h_2^2 = 0,0288551 + 0,0095425 = 0,0383976 ;$$

$$h_{3,2} = h_{3,1} - 46 h_2^3 = 0,0383976 - 0,0018950 = 0,0365026 ;$$

$$h_{3,3} = h_{3,2} + 202,4 h_2^4 = 0,0365026 + 0,0002879 = 0,0367905 ;$$

$$h_{3,4} = h_{3,3} - 708,4 h_2^5 = 0,0367905 - 0,0000348 = 0,0367557 ;$$

$$r_{3,3} = \frac{h_{3,3}}{1 - h_{3,3}} = \frac{0,0367905}{0,9632095} = 0,03819 .$$

$$4^{\circ} \quad h_4 = h_1 + 8 h_3^2 - 46 h_3^3 + 202,4 h_3^4 - 708,4 h_3^5 + \dots$$

$$h_{4,1} = h_1 + 8 h_3^2 = 0,0288551 + 0,0108078 = 0,0396629 ;$$

$$h_{4,2} = h_{4,1} - 46 h_3^3 = 0,0396629 - 0,0022842 = 0,0373787 ;$$

$$h_{4,3} = h_{4,2} + 202,4 h_3^4 = 0,0373787 + 0,0003896 = 0,0377683 ;$$

$$h_{4,4} = h_{4,3} - 708,4 h_3^5 = 0,0377683 - 0,0000501 = 0,0377182 ;$$

$$r_{4,3} = \frac{h_{4,3}}{1 - h_{4,3}} = \frac{0,0377683}{0,9622317} = 0,03925 .$$

$$5^{\circ} \quad h_5 = h_1 + 8 h_4^2 - 46 h_4^3 + 202,4 h_4^4 - 708,4 h_4^5 + \dots$$

$$h_{5,1} = h_1 + 8 h_4^2 = 0,0288551 + 0,0113773 = 0,0402324 ;$$

$$h_{5,2} = h_{5,1} - 46 h_4^3 = 0,0402324 - 0,0024684 = 0,0377640 ;$$

$$h_{5,3} = h_{5,2} + 202,4 h_4^4 = 0,0377640 + 0,0004092 = 0,0381732 ;$$

$$h_{5,4} = h_{5,3} - 708,4 h_4^5 = 0,0381732 - 0,0000540 = 0,0381192 ;$$

$$r_{5,3} = \frac{h_{5,3}}{1 - h_{5,3}} = \frac{0,0381732}{0,9618268} = 0,03969 .$$

$$6^{\circ} \quad h_6 = h_1 + 8 h_5^2 - 46 h_5^3 + 202,4 h_5^4 - 708,4 h_5^5 + \dots$$

$$h_{6.1} = h_1 + 8 h_{5.4}^2 = 0,0288551 + 0,0116246 = 0,0404797 ;$$

$$h_{6.2} = h_{6.1} - 46 h_{5.4}^3 = 0,0404797 - 0,0025480 = 0,0379317 ;$$

$$h_{6.3} = h_{6.2} + 202,4 h_{5.4}^4 = 0,0379317 + 0,0004274 = 0,0383591 ;$$

$$h_{6.4} = h_{6.3} - 708,4 h_{5.4}^5 = 0,0383591 - 0,0000570 = 0,0383021 ;$$

$$r_{6.3} = \frac{h_{6.3}}{1 - h_{6.3}} = \frac{0,0383591}{0,9616409} = 0,03989.$$

$$7^{\circ} \quad h_7 = h_1 + 8 h_6^2 - 46 h_6^3 + 202,4 h_6^4 - 708,4 h_6^5 + \dots$$

$$h_{7.1} = h_1 + 8 h_{6.4}^2 = 0,0288551 + 0,0117714 = 0,0406265 ,$$

$$h_{7.2} = h_{7.1} - 46 h_{6.4}^3 = 0,0406265 - 0,0025963 = 0,0380302 ;$$

$$h_{7.3} = h_{7.2} + 202,4 h_{6.4}^4 = 0,0380302 + 0,0004382 = 0,0384684 ;$$

$$h_{7.4} = h_{7.3} - 708,4 h_{6.4}^5 = 0,0384684 - 0,0000588 = 0,0384096 ;$$

$$r_{7.3} = \frac{h_{7.3}}{1 - h_{7.3}} = \frac{0,0384684}{0,9615316} = 0,04000 :$$

puisque  $r_{7.3} - r_{6.3}$  diffère, à fort peu près, de 0,0001, nous pouvons prendre  $r = 0,04$ .

*En pratique*, il n'est pas nécessaire de calculer les valeurs successives de  $r$ ; il suffit de déterminer deux valeurs consécutives  $h_p$  et  $h_{p+1}$  de  $h$  différant, à fort peu près, de 0,0001: la valeur de  $r$  sera très approximativement égale à  $\frac{h_{p+1}}{1 - h_{p+1}}$ .

E. BARBETTE (Liège).