V. *Eléments d'analyse infinitésimale.* — Fondements de la théorie des limites. Application de la théorie des limites à la mesure de la longueur de la circonférence, de l'aire du cercle, des surfaces et des volumes du cylindre, du cône et de la sphère. Limite du rapport $\frac{\sin x}{x}$ pour x tendant vers zéro. Limite vers laquelle tend le binome $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ quand n croît indéfiniment. Système naturel des logarithmes. Module. — Variable indépendante (argument) et dépendante (fonction). Fonction explicite et implicite. Variation continue de l'argument. Fonction continue pour la valeur donnée de l'argument et dans le domaine donné de l'argument. Exemples de fonctions continues ; fonction a^x. Représentation géométrique des fonctions. — Notion de la dérivée et de la différentielle d'une fonction. Signification géométrique et mécanique de la dérivée. — Dérivées de la somme, de la différence, du produit et du quotient de fonctions. Dérivées et différentielles d'une fonction composée. Dérivée de la fonction inverse. — Dérivées des fonctions x^m, exponentielle, logarithmique et des fonctions trigonométriques. — Représentation géométrique de la propriété de la fonction continue : « si la fonction est continue dans un certain domaine de l'argument et si aux limites du domaine elle prend des signes contraires, elle s'annule à l'intérieur du domaine ». — Représentation géométrique du théorème de Rolle ; théorème de Lagrange. — Les critères de la croissance et de la décroissance des fonctions. Valeurs extrêmes de la fonction dans le domaine donné de l'argument ; leur recherche. Equations de la tangente et de la normale d'une courbe donnée au point donné ; tangentes de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole. Notion de l'intégrale définie. Application au calcul des aires. Notion de l'intégrale indéfinie.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Un peu plus de Cinématique.

Il est une branche de la mécanique qui échappe aux postulats newtoniens : c'est la cinématique. Au moment où ces postulats sont si discutés, ne serait-il pas opportun que l'attention des chercheurs se reporte sur elle ?

Toute peu étendue qu'elle soit actuellement, elle n'en suffit pas moins à l'explication de nombreux mécanismes. Un progrès en cette partie pourrait avoir de grandes conséquences.

Voici un point de départ qui mène fort loin :

PROBLÈME. Un point matériel M étant soumis à une rotation propre, autour d'un axe A, dans un système qui est tout entier entraîné dans une rotation autour d'un axe B, déterminer la trajectoire de ce point dans la suite du temps.

Nous spécifions — *et c'est là la nouveauté* — que la distance R du mobile à son axe A doit rester invariable. Mais sa distance à l'axe B pourra varier du fait même de la rotation propre. Soit ψ l'angle que font les deux axes A et B : cet angle demeure constant.

Le lieu le plus étendu des points situés à la distance R d'un axe A est un cylindre de révolution indéfini, de rayon R, décrit autour de cet axe ; notre mobile ne peut que demeurer à la surface de ce cylindre.

D'autre part, l'entraînement est la rotation d'un système variable, puisque tous les points n'en sont pas immobiles. Nous nous faisons une idée d'une telle rotation en subdivisant le temps en intervalles infiniment petits et assimilant le système variable à un système invariable durant chacun de ces intervalles.

Pendant une de ces subdivisions du temps, notre mobile est donc astreint aussi à se trouver sur un certain cylindre de révolution décrit autour de l'axe B. Sa trajectoire, pendant le même temps, sera donc un élément de l'intersection de ce cylindre et de celui de la rotation propre.

Supposons que les axes A et B se rencontrent en un point O. Ce point restera fixe.

Prenons notre mobile sur la perpendiculaire commune aux deux axes A et B, soit en M_0, nos deux cylindres ont alors même rayon, et leurs axes concourent. Leur intersection est donc plane et la trajectoire, elliptique.

On voit aisément que, en considérant comme axes de rotation les demi-droites menées selon la convention classique, le seul plan d'intersection qui convienne est le plan bissecteur extérieur de l'angle des deux axes. L'ellipse que ce plan détermine a pour petit axe b, et pour excentricité e, savoir :

$$b = R \qquad e = \sin \frac{\psi}{2}$$

Traçons cette ellipse en entier : elle sera le lieu des points du plan qui sont à la distance R de l'axe OA ; et puisque le plan est bissecteur, ce sera aussi le lieu des points situés à la même distance de OB. Si nous envisageons le mobile en une position quelconque sur cette ellipse, il y retrouvera les mêmes conditions qu'en M_0.

A chaque intervalle de temps, un point pris sur le plan bissecteur extérieur a donc sa trajectoire élémentaire sur ce plan, et elle est un élément de l'ellipse définie par $b = R$, $e = \sin \frac{\psi}{2}$.

Dans la suite du temps, le plan bissecteur tourne, de même que l'axe OA, autour de l'axe fixe OB, et il décrit autour de cet axe un cône de révolution ayant pour demi-angle au sommet $\frac{\pi - \psi}{2}$.

Mais rapportons le mouvement du point M à un système de coordonnées participant à l'entraînement : soit, un trièdre trirectangle, ayant pour axe des z, OB, pour axe des y, la perpendiculaire commune OM_0, l'axe des x étant perpendiculaire aux deux autres. Dans un tel système, l'axe OA et le plan bissecteur restent fixes.

Or, la propriété que possède le point M d'être à la distance R de l'axe OA et de devoir rester invariablement à cette distance et celle encore d'être à la distance R de OB et de rester durant un intervalle de temps infiniment petit à la même distance de OB subsistent en quelque système que l'on ait à en examiner les effets.

Soient donc t_0, t_1, t_2 trois instants consécutifs, séparés par les intervalles infiniment petits $\triangle t_0$, $\triangle t_1$. Si, à l'instant t_0 dans notre système, le mobile est vu sur le plan bissecteur et sur l'ellipse sus-indiquée, il se déplacera, durant l'intervalle $\triangle t_0$, sur ce plan et cette ellipse, qui sont fixes pour nous ; il s'y retrouvera donc au temps $t_0 + \triangle t_0 = t_1$, puis au temps $t_1 + \triangle t_1$ ou t_2, et ainsi de suite. Le poit M se déplacera donc d'une manière continue sur les dits plan et ellipse.

Plan et ellipse sont fixes dans l'intérieur du système où nous nous sommes placés ; mais ils sont mobiles par rapport à des repères extérieurs. Le grand axe de l'ellipse est, à chaque instant, sur l'intersection du plan bissecteur avec le plan des axes AOB, lequel n'est autre que notre plan des x, z. Soit OD ce grand axe de l'ellipse, qui est dans le système une ligne fixe ; mais si, à un instant t_0, on a repéré la direction de cette ligne sur quelque étoile éloignée, et tracé sur le plan cette direction OD_0, on verra sur le plan du mouvement cette direction OD_0 s'écarter continuellement de la direction OD. Le plan et toute figure liée à OD paraîtront donc pivoter autour du point O.

En examinant les choses d'un point de vue extérieur à notre système, c'est, au contraire, la direction OD_0 qui sera fixe, et la direction OD qui s'en écartera continuellement.

Le mobile n'en décrit pas moins son ellipse, mais celle-ci est *tropique ;*

Le pivotement de OD par rapport à OD_0 constitue une sorte de mouvement *précessoral ;*

Enfin, le plan du mouvement éprouve sa *variation conique* autour de l'axe fixe OB.

Les conditions de vitesse des mouvements composants pourront faire que le premier de ces mouvements, le mouvement elliptique, paraisse exister seul, le deuxième étant presque insensible et le troisième, tout à fait négligeable. Mais ces trois sortes de mouvements existent toujours.

En quelque position qu'un mobile se trouve par rapport aux axes A et B, et quand même ces axes ne se rencontreraient pas, on peut toujours mener, par une position N, un plan bissecteur extérieur de l'angle des axes représentatifs des deux rotations. Soit O_n le point où ce plan rencontre l'axe A; menons par O_n une parallèle O_nB' à l'axe B. On peut substituer à la rotation d'entraînement une rotation égale autour de l'axe OB', plus une certaine translation à déterminer à chaque instant.

Sous l'influence de la rotation propre et de la rotation autour de OB', le mobile N décrit une ellipse, pivotant dans son plan autour de O_n, pendant que ce plan varie coniquement dans l'espace. La translation complémentaire ne modifie en rien la direction des plans, ni les déplacements angulaires; mais elle reporte le point de pivotement au véritable point fixe, qui est l'intersection du plan bissecteur avec l'axe fixe B. Et, durant chaque intervalle de temps infiniment petit, cette translation respecte aussi le mouvement elliptique élémentaire, mais en le soumettant, par la suite du temps, à son propre changement de direction.

La trajectoire du mobile peut donc toujours, dans les limites utiles d'ailleurs, être définie par une ellipse pivotant autour d'un point de son plan, pendant que ce plan varie coniquement dans l'espace autour du même point.

Quand un pendule bat à la surface de la Terre, la distance du centre de percussion à l'axe d'oscillation est une donnée qui ne varie pas, soit que le pendule batte ou ne batte pas, ni du fait que la Terre tourne. Le cas rentre donc dans les conditions de notre problème. L'expérience du Panthéon a rendu manifeste les trois sortes d'effets que nous venons d'indiquer : trajectoire tropique (alternativement différente), pivotement précessoral (alternatif), variation conique dans l'espace.

La détermination des mouvements dans notre problème exige une analyse plus approfondie que ce qui précède. On démontre :

1° Que lorsque le mobile est sur le plan bissecteur, il décrit sur l'ellipse tropique des secteurs égaux dans des temps égaux, l'origine de ces secteurs étant au centre de l'ellipse.

2° Lorsque le mobile est en dehors de ce plan, le mouvement analogue est possible encore, mais dans certaines limites; les secteurs égaux décrits dans des temps égaux ont alors pour sommet commun l'un ou l'autre foyer.

3° Lorsque les axes ne se rencontrent pas, les secteurs décrits successivement dans des temps égaux ne peuvent être égaux ni autour du centre, ni autour d'un foyer, ni autour d'aucun autre point.

Les conditions de possibilité, de stabilité ou d'instabilité, de persistance ou de cessation de ces mouvements offrent un grand intérêt et touchent à diverses questions de physique et d'astronomie.

Comm[t] LITRE (Toulouse).

NOTATIONS RATIONNELLES POUR LE SYSTÈME VECTORIEL MINIMUM

(NOMBRE, POINT, VECTEUR)

PROPOSÉES PAR LES PROFESSEURS **C. Burali-Forti** ET **R. Marcolongo.**

NOTE DE LA RÉDACTION. — Ce tableau est extrait de l'étude très documentée que MM. BURALI-FORTI et MARCOLONGO ont consacré à l'unification des notations vectorielles dans les *Rendiconti di Palermo* (1907-08). A la suite d'une communication qui a été faite sur ce sujet au IVe Congrès international des mathématiciens qui a eu lieu à Rome, en avril 1908, une Commission internationale a été chargée de l'étude de cette question. Au moment où le Calcul vectoriel se répand de plus en plus dans les sciences appliquées, la nécessité de posséder une notation uniforme, tout au moins pour les opérations, devient très urgente. Il faut espérer qu'un résultat définitif pourra être obtenu d'un commun accord entre les représentants des différentes écoles d'ici au prochain Congrès (Cambridge, 1912).

Nous engageons tous ceux qui s'intéressent au développement des méthodes si fécondes du Calcul vectoriel à examiner les notations proposées tant au point de vue de leur emploi dans les manuels et les mémoires qu'à celui de l'enseignement oral. Il est désirable que la discussion soit aussi large et aussi complète que possible et que l'on entende toutes les personnes compétentes appartenant aux différentes écoles ou représentant les diverses branches qui font emploi de l'Analyse vectorielle. *L'Enseignement Mathématique* est à leur disposition. Nous publierons les observations qu'ils jugeront utiles de nous adresser, ou tout au moins des extraits, dans la rubrique « Mélanges et Correspondances ».

LA RÉDACTION.

Les notations ne doivent pas être en contradiction avec celles propres des systèmes mécaniques géométriques de GRASSMANN (formes géométriques), HAMILTON (quaternions), MÖBIUS (barycentres).

Les opérations[1] doivent être assujetties, le plus possible, aux lois formales analogues à celles *universellement* employées dans l'Analyse.

Dans ce qui va suivre : A, B sont des points ; $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ des vecteurs ; m, n, φ des nombres réels ; u est un nombre réel et $\mathbf{u}$ un vecteur fonctions d'un point[2].

[1] Nous appelons *symboles d'opérations* ceux qui, comme $+ - \times /$, sont placés entre deux entités. Nous appelons *symboles de fonction* ceux qui, comme sin, log, ! , sont préposés ou placés après une entité. Chaque opération est exprimable par une fonction de deux variables ; par ex., $\sigma(x, y)$ au lieu de $x + y$. Mais, réciproquement, une fonction n'est pas toujours exprimable par une opération. Il y a donc une différence remarquable entre *opération* et *fonction*. Le calcul formal des opérations est, en général, *plus simple* que le calcul formal des fonctions correspondantes des deux variables ; il est donc préférable, lorsqu'il est possible, de faire usage d'opération plutôt que de fonctions.

[2] Nous croyons qu'une *convention générale et fixe* relative à la forme des lettres qui doivent représenter *nombres, points, vecteurs,* est hors de propos. — Certainement elle n'est point nécessaire, car le calcul vectoriel reçoit le caractère algébrique seulement par les symboles d'*opérations* $+ - \times \wedge$ et par les symboles des *fonctions* $i, e^{i\varphi}$ grad, rot, div. Chaque auteur peut, ou non, *ad libitum*, faire une convention spéciale relative à la forme des lettres ; à condition qu'il ne se soustraira pas à l'obligation d'indiquer avec exactitude quelle est la signification des lettres qu'il emploie.

	Notations proposées		Notations à exclure et principales raisons de l'exclusion	
Vecteur de A à B.	B — A (B moins A)	Grassmann[3] Hamilton Möbius[4]	AB	Cette notation (qui indique une entité bien différente du vecteur B—A) a pour le produit alterné de Grassmann, des propriétés formales analogues à celles du produit algébrique, et doit être, par conséquent, réservée pour le produit alterné. Si AB indique un vecteur on a un nouveau calcul qui n'a pas d'analogie avec le calcul algébrique.
		Bellavitis[5]	$\overline{AB}$ (AB)	Tous les défauts précédents ; difficulté typographique du trait superposé ; inutilité absolue du trait et des parenthèses.
Grandeur ou module de **a**	mod**a**[6]	Argand Cauchy	$\vert\mathbf{a}\vert$	mod est *symbole de fonction* qui suit toutes les lois algébriques communes, car on l'écrit tout du côté de la variable. Dans la notation $\vert\mathbf{a}\vert$ le symbole de fonction est $\vert\,\vert$ qui n'est pas du côté de la variable. Dans le calcul de Grassmann ce symbole produit de la confusion avec la notation $\vert$, *index*, symbole de fonction qui préposé à un vecteur ou à un bivecteur produit un bivecteur ou un vecteur (axe-moment d'un *couple*).
Somme de A avec **a** Somme de **a** avec **b**	$A + \mathbf{a}$ $\mathbf{a} + \mathbf{b}$	Grassmann Hamilton		
Différence entre **a** et **b** Produit de **a** par m	$\mathbf{a} - \mathbf{b}$ $m\mathbf{a}$ $\mathbf{a}m$	(adopté par tous)		

[3] Nous indiquons seulement les auteurs qui, les premiers, ont fait usage du symbole que nous proposons.

[4] B — A, ou A — B, est un cas limite de la notation barycentrique. L'opération $A + \mathbf{a}$ conseille d'écrire B — A au lieu de A — B.

[5] Il fait usage systématiquement de la notation AB ; mais il est obligé de se servir de la notation B — A ou A — B pour *rendre évidentes* quelques identités et pour la théorie barycentrique de Möbius.

[6] Des auteurs prétendent indiquer avec $\overline{m}$ le vecteur **a** tel que mod $\mathbf{a} = m$. Il est évident que « vecteur dont le module est m », est une classe qui contient des vecteurs au nombre infini et dont la direction et le sens sont ARBITRAIRES. La notation $\overline{m}$ n'est donc pas logique et doit être exclue.

	Notations proposées		Notations à exclure et principales raisons de l'exclusion	
Produit interne de **a** par **b**.	**a** × **b** (**a** interne **b**)	GRASSMANN RESAL SOMOFF	— S(**ab**)	Notation abrégée de HAMILTON, dans laquelle **ab** est un quaternion, fonction vectorielle qui n'est point nécessaire dans le système vectoriel minimum. La notation complète est — S(I^{-1}**a**) (I^{-1}**b**).
			S(**ab**), S(**a**, **b**)	Elles sont des fonctions de deux variables, avec des propriétés formales plus compliquées que **a** × **b** qui a *toutes* les propriétés formelles algébriques.
			(**a** . **b**) (**a**, **b**)	Fonctions de deux variables. Le symbole de fonction () est contraire aux lois universelles algébriques.
			a . **b**	Le point est en algèbre un séparateur ; **a . b** est donc le même que **ab**, notation qui doit être réservée pour le bivecteur de GRASSMANN, pour lequel elle a les propriétés ordinaires formales algébriques.
Produit vectoriel de **a** par **b**	**a** ∧ **b** (**a** vecteur **b**)	(not. nouvelle) [7]	V(**ab**)	Notation abrégée de HAMILTON ; complète V(I^{-1}**a**) (I^{-1}**b**). Les observations faites pour S.
			V(**a**, **b**), V(**ab**)	Fonctions de deux variables. Voir observations précédentes.
			[**a** . **b**], [**a**, **b**]	Encore fonctions de deux variables le symbole de fonction étant [], contrairement aux lois algébriques les plus répandues. Dans les notations (**a**, **b**), [**a**, **b**] la *forme* des parenthèses doit *caractériser* les deux fonctions, tandis que dans l'algèbre la forme des paranthèses est *accidentelle*.
			a × **b**	(de GIBBS) Le symbole × est de GRASSMANN qui l'a employé dans une signification bien différente, avec toutes les propriétés formelles algébriques. Dans le produit vectoriel il n'a pas la propriété commutative.
			| (**ab**)	Notation *importante* et *bien appropriée* de GRASSMANN ; mais (**ab**) est un *bivecteur* entité qui n'est pas nécessaire dans le système minimum [| **ab** = axe-moment du *couple* **ab**].

[7] Le symbole ∧ est le symbole ordinaire < qui a reçu une rotation à droite de 90°. Un ouvrage de calcul vectoriel peut donc être composé dans une typographie quelconque. De plus, ∧ ressemble à la lettre ʌ, renversée, initiale du mot « vectoriel » ; les symboles + — × ∧ ont le même *corps*, et les formules sont d'une lecture facile. Une fois établi que le symbole d'*opération* est plus opportun que celui de *fonction de deux variables*, il a été nécessaire de proposer un symbole nouveau, car personne n'avait fait usage jusqu'ici d'un symbole convenable.

	Notations proposées		Notations à exclure et principales raisons de l'exclusion	
(dans un plan) $\mathbf{a}$ tourné d'un angle droit vecteur $m\mathbf{a} + in\mathbf{a}$ $\mathbf{a}$ tourné de φ radiants	$i\mathbf{a}$ $(m + in)\mathbf{a}$ $\begin{cases}(\cos\varphi + i \\ \sin\varphi)\,\mathbf{a}e^{i\varphi}\,\mathbf{a}\end{cases}$	Wessel Hamilton Bellavitis	$m + in$ au lieu de $(m + in)\mathbf{a}$	$m + in$ est un quaternion dont m est le *scalaire* et $n\,i$ le *vecteur*. Il n'est pas possible d'identifier $m + in$ avec $(m + in)\mathbf{a}$, car, dans un plan, un *quaternion non droit* et un *vecteur* sont des entités à **trois** et à **deux** dimensions respectivement. En outre : $\mathbf{a}$ étant supprimé, on supprime l'*autonomie ;* le produit de deux nombres complexes n'a point de rapport avec le produit quaternionnel et avec les opérations $\times\ \wedge$.
Gradient de u	grad u	Maxwel Riemann-Weber	∇u	Notation abrégée de Hamilton (complète $\mathrm{I}\,\nabla u$) dans laquelle ∇ (nabla) est symbole de fonction qui. placé devant un quaternion, produit un quaternion. La même signification a ∇ dans les notations qui donnent la *divergence* et la *rotation* du vecteur $\mathbf{u}$. Le symbole ∇ qui est bien approprié aux quaternions n'est pas applicable dans le système minimum.
Divergence de $\mathbf{u}$	div $\mathbf{u}$	Clifford	$-\,\mathrm{S}\nabla\mathbf{u}$	Notation de Hamilton ; complète $-\,\mathrm{S}\,\nabla\,\mathrm{I}^{-1}\mathbf{u}$. Observations précédentes.
			$\nabla\mathbf{u}$	Le symbole ∇ ne peut pas être celui de Hamilton. Il n'est point un symbole tachygraphique cartésien ; il a une signification bien différente que dans la notation ∇u, bien que ∇u ne soit pas employé dans la signification hamiltonienne.
			$\vert\nabla\mathbf{u}\vert$	Comme le précédent : la notation $\vert\vert$ est inutile.
			$\nabla \times \mathbf{u}$	Le $\nabla\,.\,\mathbf{u}$ de Gibbs, dans lequel ∇ doit être *vecteur symbolique* ; mais il n'a pas les propriétés des vecteurs par rapport à $\times$. Le symbole $\nabla\times$ est tachygraphique pour les coordonnées cartésiennes ; il n'a pas d'importance, car il n'admet pas de puissances.

	Notations proposées		Notations à exclure et principales raisons de l'exclusion	
Rotation de $\mathbf{u}$	rot $\mathbf{u}$	LORENTZ FERRARIS	$V \nabla \mathbf{u}$ $\{\nabla \mathbf{u}\}$ $\nabla \wedge \mathbf{u}$	Notation de HAMILTON ; complète $V \nabla I^{-1} \mathbf{u}$. Observations précédentes. Le même que pour $\mid \nabla \mathbf{u} \mid$. Les fonctions de $\mathbf{u}$, $\mid \nabla \mathbf{u} \mid$, $\{\nabla \mathbf{u}\}$ sont caractérisées par la *forme* des parenthèses : donc, le symbole ∇ est inutile. Mais les parenthèses ne peuvent pas être symboles de fonctions et leur forme ne peut pas distinguer une fonction de l'autre. La notation $\nabla \times \mathbf{u}$ de GIBBS. Voir les observations faites pour la notation $\nabla . \mathbf{u}$.
			Δu $\Delta_2 u$ $\Delta_2 \mathbf{u}$	(de LAMÉ). Il a la même signification que le mod grad. Dans le calcul vectoriel paraît grad u et, en dépendance, son module. La forme symbolique cartésienne du symbole Δ_2 est $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$: mais on a $\Delta_2 u =$ div grad u $\quad \Delta_2 \mathbf{u} =$ grad div $\mathbf{u}$ — rot rot $\mathbf{u}$, et donc Δ_2 a des propriétés diverses selon qu'il est proposé à un nombre ou à un vecteur. Or il n'est pas permis d'indiquer avec un même symbole deux fonctions qui diffèrent non seulement par le champ d'application, mais aussi par leurs propriétés. S'il est nécessaire d'employer les produits de trois parmi les fonctions div, grad, rot, on pourra poser $\Delta =$ div grad $\quad \Delta' =$ grad div — rot rot, ou bien écrire Δ_2 et Δ_2' au lieu de Δ et Δ'.

Torino } janvier 1908.
Napoli }

C. BURALI-FORTI.

R. MARCOLONGO.