

LE POLYGONE INSCRIT EN GÉOMÉTRIE NON-EUCLIDIENNE

Autor(en): **Cailler, C.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1909)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-11867>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

de la divisibilité de $a^2 + b^2$ par $x^2 + y^2$ et autres théorèmes analogues ; utilisation de ces théorèmes dans la recherche des diviseurs des nombres : tout cela dû en principe à Fermat, mais démontré et grandement perfectionné par Euler.

On lui doit en propre : la théorie de *partitione numerorum* ; de curieuses formules et séries sur les nombres premiers et les diviseurs des nombres ; la considération des racines des congruences, de leur nombre possible, des racines primitives ; l'extension du crible arithmétique ; l'emploi des fractions continues dans la théorie des nombres ; un grand nombre d'identités des plus utiles ; des vues variées et ingénieuses sur l'analyse indéterminée, qu'il a enrichie de méthodes et de questions nouvelles ; enfin de nombreuses tables dont il souhaitait l'extension, pour favoriser la découverte des propriétés des nombres.

A. AUBRY (Dijon).

LE POLYGONE INSCRIT EN GÉOMÉTRIE NON-EUCLIDIENNE

L'article publié par M. A. PADOA dans l'*Ens. math.* du 15 mars 1909, attire de nouveau l'attention sur l'intéressant problème de l'inscription dans un cercle d'un polygone de côtés donnés dans leur ordre de succession et leur grandeur. Ce problème de Géométrie élémentaire peut être résolu d'une manière rigoureuse seulement par des équations algébriques de degré élevé, mais le recours à un postulat tel que celui invoqué par M. Padoa me paraît plutôt compliquer les choses que les faciliter. En effet, quand on étudie le maximum ou le minimum de la surface d'un polygone articulé, la possibilité de l'inscription dans un cercle n'est qu'un premier pas vers la solution du problème. De plus il en va ici comme toutes les fois qu'on s'appuie sur une propriété de maximum pour établir un théorème d'existence : à sup-

poser même le procédé exact, et évident le maximum, on n'a encore aucun moyen pour calculer les inconnues de la question, dans le cas actuel, les angles du polygone ou le rayon du cercle circonscrit.

Le problème de l'inscription peut se poser en Géométrie sphérique ou riemannienne. Il se ramène alors de suite au cas du plan ordinaire, car si un polygone sphérique à côtés a, b, \dots, l est inscrit dans un cercle, il en est de même pour le polygone plan formé avec les cordes du premier, ou $\sin \frac{a}{2}, \sin \frac{b}{2}, \dots, \sin \frac{l}{2}$; ce sont, au contraire, deux problèmes distincts que ceux du maximum des polygones plan ou sphérique. En Géométrie de Lobatchewski, les deux questions sont nouvelles et présentent quelques particularités qu'on ne rencontre pas dans les deux autres cas. C'est ce qui m'engage à les traiter ici avec quelques détails, sinon complètement; nous ne nous occuperons en effet que de l'hypothèse de beaucoup la plus simple, celle de polygones non-étoilés et même convexes. La méthode est du reste générale; on retombera, par exemple, sur le cas du plan euclidien en prenant égal à l'infini le module k de la Géométrie de Lobatchewski.

Pour alléger l'écriture, désignons par $f(x), \varphi(x), \psi(x)$ le cosinus, le sinus et la tangente hyperboliques,

$$f(x) = \frac{e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}}{2}, \quad \varphi(x) = \frac{e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}}{2}, \quad \psi(x) = \frac{e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}}{e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}}.$$

Inscription dans un cercle. Soient $2a_1, 2a_2, \dots, 2a_n$ les côtés d'un polygone fermé, $2a_n$ le plus grand d'entre eux, ρ le rayon inconnu du cercle circonscrit, $2\alpha_1, 2\alpha_2, \dots, 2\alpha_n$ les angles au centre correspondant à ces côtés. On doit avoir

$$\varphi(\rho) \sin \alpha_i = \varphi(a_i), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ou bien

$$\sin \alpha_i = \frac{x}{b_i}, \quad (1)$$

en faisant pour abrégé $\varphi(\rho) = \frac{1}{x}$, et $\varphi(a_i) = \frac{1}{b_i}$. On voit que

l'inconnue x ne peut être négative ni dépasser la plus petite des quantités b , ou b_n ; tous les angles α seront comptés aigus et se trouvent exprimés par l'équation (1) en fonction de l'indéterminée x . Le polygone étant fermé, il faut de plus qu'on ait

$$F(x) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \pi, \quad (2)$$

si le centre est intérieur au polygone, et

$$\Phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} - \alpha_n = 0, \quad (3)$$

si ce centre est en dehors du polygone. Les équations (1) et (2), ou (1) et (3) seront ainsi, suivant le cas, celles du problème à résoudre.

Faisons varier x de 0 à b_n , tous les angles α augmentent en même temps, α_i jusqu'à arc sin $\frac{b_n}{b_i}$, α_n jusqu'à $\frac{\pi}{2}$. Ainsi $F(x)$ augmente constamment de zéro jusqu'à

$$\text{arc sin } \frac{b_n}{b_1} + \text{arc sin } \frac{b_n}{b_2} + \dots + \text{arc sin } \frac{b_n}{b_{n-1}} + \frac{\pi}{2}.$$

On aura donc une solution, et une seule, de l'équation (2) à condition que l'inégalité

$$\text{arc sin } \frac{\varphi(a_1)}{\varphi(a_n)} + \text{arc sin } \frac{\varphi(a_2)}{\varphi(a_n)} + \dots + \text{arc sin } \frac{\varphi(a_{n-1})}{\varphi(a_n)} \geq \frac{\pi}{2}, \quad (4)$$

soit satisfaite.

En second lieu, la fonction $\Phi(x)$ admet pour dérivée

$$\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{b_1^2 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{b_2^2 - x^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{b_{n-1}^2 - x^2}} - \frac{1}{\sqrt{b_n^2 - x^2}},$$

et celle-ci ne peut pas s'annuler plus d'une fois comme on le voit en écrivant

$$\sqrt{b_n^2 - x^2} \Phi'(x) = \sqrt{\frac{b_n^2 - x^2}{b_1^2 - x^2}} + \dots + \sqrt{\frac{b_n^2 - x^2}{b_{n-1}^2 - x^2}} - 1,$$

équation dont tous les termes variables au second membre sont décroissants. Supposons que le côté a_n ne soit égal à aucun des autres, seul cas où l'équation (3) puisse être véri-

fiée, $\Phi'(x)$ finit alors avec une valeur négative pour $x = b_n$. Ainsi $\Phi(x)$ sera ou toujours décroissante, ou d'abord croissante puis décroissante, suivant que $\Phi'(0)$ ou

$$\varphi(a_1) + \varphi(a_2) + \dots + \varphi(a_{n-1}) - \varphi(a_n)$$

est négatif ou positif. Dans le premier cas il n'y a aucune solution de $\Phi(x) = 0$ sauf la solution inopérante $x = 0$; dans le second, il n'y a de solution que si la valeur finale de $\Phi(x)$ est négative. En résumé, nous trouverons une solution et une seule de l'équation (3), sous la double condition

$$\varphi(a_1) + \varphi(a_2) + \dots + \varphi(a_{n-1}) - \varphi(a_n) > 0, \quad (5)$$

$$\text{arc sin } \frac{\varphi(a_1)}{\varphi(a_n)} + \dots + \text{arc sin } \frac{\varphi(a_{n-1})}{\varphi(a_n)} < \frac{\pi}{2}. \quad (6)$$

Inscription dans une équidistante de droite. Remarquons que si des angles aigus $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ ont une somme égale à un droit, ou plus grande, la somme de leurs sinus est supérieure à l'unité. En effet on a

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1 < \sin \theta_1 + \sin \theta_2,$$

d'où l'on tire immédiatement

$$\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \dots + \sin \theta_m > \sin(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_m) > 1,$$

si la somme des angles est égale à 90° . A fortiori, la même inégalité a lieu quand cette somme est $> 90^\circ$, chaque sinus augmentant quand on fait croître l'angle correspondant.

Ainsi l'inégalité (4) qu'on rencontre en traitant le premier cas examiné plus haut entraîne comme conséquence

$$\varphi(a_1) + \varphi(a_2) + \dots + \varphi(a_{n-1}) - \varphi(a_n) > 0, \quad (5)$$

obtenue aussi dans le second cas. On voit que cette inégalité (5) est une condition nécessaire et suffisante pour l'inscription du polygone dans un cercle, le problème admettant alors une seule solution, laquelle rentre dans le premier ou le second type selon qu'est satisfaite l'inégalité (4) ou sa contraire (6). On peut remarquer aussi que le rayon du cercle

circonscrit ne dépend pas de l'ordre de succession des côtés mais seulement de leur grandeur.

Si l'inégalité de condition (5) n'a pas lieu, le polygone ne peut être inscrit dans un cercle; nous allons voir qu'il est inscrit dans une équidistante de droite.

Nommons p l'équidistance inconnue et $2\alpha_i$ la projection du côté $2a_i$ sur la droite donnée, nous avons

$$\varphi(a_i) = f(p) \varphi(\alpha_i) , \quad \text{ou} \quad \varphi(\alpha_i) = \frac{x}{b_i} ,$$

en posant cette fois $x = \frac{1}{f(p)}$ quantité positive et inférieure à l'unité. Le polygone devant être fermé, il faut en outre que

$$\Phi_1(x) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} - \alpha_n = 0 ,$$

du moins quand il n'y a pas d'angle rentrant. On a

$$k^{-1}\Phi_1'(x) = \frac{1}{\sqrt{b_1^2 + x^2}} + \frac{1}{\sqrt{b_2^2 + x^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{b_{n-1}^2 + x^2}} - \frac{1}{\sqrt{b_n^2 + x^2}} ,$$

et comme le second membre ne peut s'annuler plus d'une fois, l'équation $\Phi_1(x) = 0$ possédera, en dehors de la solution banale $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, une seule solution, ou aucune.

On a évidemment $\Phi_1'(\infty) = \frac{n-2}{k^{-1}x} > 0$; la condition pour l'existence d'une solution est contenue dans les deux inégalités $\Phi_1'(0) < 0$, $\Phi_1(1) > 0$, ou comme on voit de suite

$$\varphi(a_1) + \varphi(a_2) + \dots + \varphi(a_{n-1}) - \varphi(a_n) < 0 ,$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} - a_n > 0 .$$

La dernière est nécessaire pour qu'on puisse construire un polygone fermé avec les côtés donnés et si elle ne se présentait pas pour l'inscription dans le cercle, c'est qu'elle était déjà impliquée par l'inégalité (5), comme on peut aisément le faire voir.

Quand la différence

$$\varphi(a_1) + \varphi(a_2) + \dots + \varphi(a_{n-1}) - \varphi(a_n)$$

tend vers zéro par les valeurs positives ou négatives, les inconnues ρ ou p deviennent infinies et les lieux correspondants dégèrent en horicycles.

Inscription dans un horicycle. Il est en effet facile de reconnaître directement que si

$$\varphi(a_1) + \varphi(a_2) + \dots + \varphi(a_{n-1}) - \varphi(a_n) = 0, \quad (7)$$

le polygone est inscriptible, d'une seule manière, dans un horicycle.

Rapportons cette courbe à deux axes coordonnés, dont l'un OX lui soit normal et l'autre OY tangent en O; son équation est

$$f(y) = e^{\frac{x}{k}},$$

les ordonnées y étant, bien entendu, mesurées perpendiculairement sur OX. La distance $2a$ de deux points de l'horicycle $P_0(x_0, y_0)$ et $P_1(x_1, y_1)$ est donnée par la formule

$$2\varphi(a) = \varphi(y_1) - \varphi(y_0),$$

quand $y_1 > y_0$. Soient alors, dans l'ordre de grandeur croissante, y_0, y_1, \dots, y_{n-1} les ordonnées des n sommets de notre polygone inscrit; on a

$$\begin{aligned} 2\varphi(a_i) &= \varphi(y_i) - \varphi(y_{i-1}), & i = 1, 2, \dots, n-1. \\ -2\varphi(a_n) &= \varphi(y_0) - \varphi(y_n). \end{aligned}$$

L'addition de ces n équations fournit la formule (7) qui est ainsi une condition nécessaire de l'inscription. Réciproquement, si elle est satisfaite, on déterminera les sommets par les relations

$$\varphi(y_1) = 2\varphi(a_1) + \varphi(y_0),$$

$$\varphi(y_2) = 2\varphi(a_1) + 2\varphi(a_2) + \varphi(y_0).$$

$$\dots$$

$$\varphi(y_{n-1}) = 2\varphi(a_1) + 2\varphi(a_2) + \dots + 2\varphi(a_{n-1}) + \varphi(y_0).$$

La quantité y_0 reste arbitraire, mais comme il n'existe, aux déplacements près, qu'un seul horicycle, il est clair que

notre problème se trouve résolu d'une unique manière, le changement de la quantité y_0 équivalant à déplacer le polygone le long de l'horicycle.

Propriétés des Cycles. Rappelons que les points du plan de Lobatchewski se déterminent à l'aide de trois coordonnées ξ, η, ζ , dont la première est positive, et assujetties à la condition $\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2 = 1$. Une droite a pour équation une relation linéaire homogène entre les coordonnées, tandis qu'une équation non homogène du premier degré

$$a\xi + b\eta + c\zeta = d, \quad (8)$$

représente un cercle, une équidistante de droite, ou un horicycle, selon que la quantité $a^2 - b^2 - c^2$ est positive, négative, ou nulle. Sans distinguer les trois cas, appelons *cycle* le lieu représenté par la formule précédente. Voici alors les propositions dont nous avons besoin.

Coupons un cycle par deux cordes AB, CD; alors

1° Si ces cordes sont concourantes en O, comptons sur chaque droite, à partir de ce point de rencontre, les abscisses OA = α , OB = β , OC = γ , OD = δ ; on aura

$$\frac{f\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)}{f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)} = \frac{f\left(\frac{\gamma - \delta}{2}\right)}{f\left(\frac{\gamma + \delta}{2}\right)}. \quad (9)$$

2° Si ces cordes sont non-sécantes, comptons sur chacune, dans le même sens, à partir des pieds O et O' de la perpendiculaire commune les abscisses OA = α , OB = β , O'C = γ , O'D = δ ; on aura

$$\frac{f\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)} = \frac{f\left(\frac{\gamma - \delta}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{\gamma + \delta}{2}\right)}. \quad (10)$$

3° Si ces cordes sont parallèles, comptons les abscisses sur chacune de ces droites du côté où elles s'éloignent l'une de l'autre et à partir de deux points O et O' dont la ligne de

jonction soit également inclinée sur les deux droites: on aura

$$e^{-\frac{\alpha}{k}} + e^{-\frac{\beta}{k}} = e^{-\frac{\gamma}{k}} + e^{-\frac{\delta}{k}} . \quad (11)$$

4° Les réciproques des trois propositions précédentes sont exactes; autrement dit, si les équations (9), (10) ou (11) sont satisfaites respectivement dans les hypothèses de la convergence, de la non-intersection, ou du parallélisme des cordes AB, CD, les quatre points A, B, C, D sont sur un même cycle.

Pour démontrer les théorèmes énoncés, rappelons qu'une droite issue d'un point $P_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ perpendiculairement à la droite de coordonnées u_0, v_0, w_0 , passant en P_0 , a pour équations paramétriques

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 f(s) - u_0 \varphi(s) , \\ \eta &= \eta_0 f(s) + v_0 \varphi(s) , \\ \zeta &= \zeta_0 f(s) + w_0 \varphi(s) , \end{aligned}$$

le paramètre s étant précisément le segment rectiligne compté de P_0 . Les valeurs de cette abscisse s correspondant aux points d'intersection du rayon avec le cycle (8) vérifient donc la condition

$$Rf(s) + S\varphi(s) = d ;$$

on a posé

$$R = a\xi_0 + b\eta_0 + c\zeta_0 , \quad \text{et} \quad S = -au_0 + bv_0 + cw_0 .$$

Dans le premier des cas énumérés ci-dessus, faisons coïncider P_0 avec O , et remarquons qu'en changeant la direction du rayon OAB, la quantité S changera, mais non pas R . On a

$$Rf(\alpha) + S\varphi(\alpha) = d , \quad \text{et} \quad Rf(\beta) + S\varphi(\beta) = d , \quad (12)$$

d'où, en éliminant S

$$R\varphi(\alpha - \beta) = d(\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)) ;$$

par suite de l'observation précédente

$$\frac{\varphi(\alpha - \beta)}{\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)} = \frac{\varphi(\gamma - \delta)}{\varphi(\gamma) - \varphi(\delta)} ,$$

équation qui diffère de (9) seulement par l'écriture.

Dans le second cas, prenons la perpendiculaire commune pour la droite u_0 , v_0 , w_0 , et P_0 tantôt en O , tantôt en O' suivant que nous voulons considérer une corde ou l'autre. Dans les deux suppositions S est le même, R est différent; ce sera donc R qu'il convient d'éliminer entre les relations (12), qui donnent

$$S\varphi(\alpha - \beta) = d(f(\alpha) - f(\beta)) ,$$

ou bien

$$\frac{\varphi(\alpha - \beta)}{f(\alpha) - f(\beta)} = \frac{\varphi(\gamma - \delta)}{f(\gamma) - f(\delta)} .$$

Cela est identique à l'équation (10).

On passe au cas du parallélisme en remplaçant dans (9) ou (10), les quantités α , β , γ , δ par $\alpha + \rho$, $\beta + \rho$, $\gamma + \rho$, $\delta + \rho$, puis en rendant l'auxiliaire ρ infinie; mais il est aussi facile de démontrer directement l'équation (11) relative à ce cas. Ecrivons à cet effet les équations d'une parallèle à l'axe des x sous la forme

$$\xi = f(y)e^{\frac{s}{k}} - \frac{\varphi(s)}{f'(y)}, \quad \eta = \frac{\varphi(s)}{f'(y)}, \quad \zeta = \varphi(y)e^{\frac{s}{k}} ;$$

y est le segment détaché par cette parallèle sur l'axe OY et change de signe quand on remplace cette parallèle par sa symétrique, s est le segment rectiligne compté à partir du même axe OY . En substituant les valeurs précédentes dans l'équation du cycle, on aura, pour déterminer les rayons vecteurs des points d'intersection, l'équation du second degré

$$e^{-\frac{2s}{k}} - \frac{2df(y)}{a-b} e^{-\frac{s}{k}} + \dots = 0 ,$$

et si elle admet deux racines α , β on aura

$$e^{-\frac{\alpha}{k}} + e^{-\frac{\beta}{k}} = + \frac{2df(y)}{a-b} ;$$

mais comme le second membre ne dépend pas du signe de y , la relation (11) se trouve établie.

Pour éviter des longueurs inutiles, nous ne démontré-

rons la réciproque que dans le premier cas, les deux autres se traitant d'une manière entièrement analogue.

Soient comme ci-dessus $P_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ le point de concours des cordes AB, CD; $a\xi + b\eta + c\zeta = d$ le cycle qui passe par les trois points A, B, C; u_0, v_0, w_0 les coordonnées de la droite P_0AB , u'_0, v'_0, w'_0 celles de la droite P_0CD ; enfin $R = a\xi_0 + b\eta_0 + c\zeta_0$, $S = -au_0 + bv_0 + cw_0$, $S' = -au'_0 + bv'_0 + cw'_0$. L'hypothèse est résumée dans les équations

$$Rf(\gamma) + S'\varphi(\gamma) = d,$$

$$R\varphi(\alpha - \beta) = d(\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)),$$

et enfin (9), ou

$$\frac{\varphi(\alpha - \beta)}{\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)} = \frac{\varphi(\gamma - \delta)}{\varphi(\gamma) - \varphi(\delta)},$$

d'où l'on tire l'équation

$$Rf(\delta) + S'\varphi(\delta) = d,$$

laquelle établit que le rayon P_0C recoupe le cycle en D.

Maximum d'un polygone de côtés donnés. Soit un rayon mobile tournant autour d'un point O, si l'autre extrémité M se déplace de M en M', tandis que le rayon tourne de l'angle $d\alpha$, l'aire balayée vaut

$$du = k^2[f(OM) - 1]d\alpha = 2k^2\varphi^2\left(\frac{OM}{2}\right)d\alpha.$$

Désignons d'autre part par dn le déplacement du point M, estimé perpendiculairement à OM, on a encore

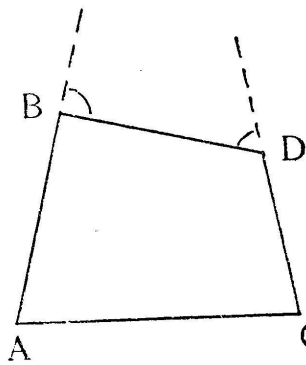
$$dn = l\varphi(OM)d\alpha = 2k\varphi\left(\frac{OM}{2}\right)f\left(\frac{OM}{2}\right)d\alpha,$$

• d'où

$$du = k\psi\left(\frac{OM}{2}\right)dn.$$

Traisons d'abord le problème pour un quadrilatère ABCD. Déformons-le sans bouger les points A et C. Alors si dn et dn' sont les déplacements des points B et D, normaux sur les côtés AB et CD et comptés positifs à gauche de ces côtés,

les aires balayées sont $k\psi\left(\frac{AB}{2}\right)dn$, $k\psi\left(\frac{CD}{2}\right)dn'$, d'où résulte un accroissement de l'aire du polygone



$$ds' = k \left[\psi\left(\frac{AB}{2}\right)dn - \psi\left(\frac{CD}{2}\right)dn' \right]. \quad (13)$$

L'aire balayée par le côté $BD = x$ s'obtient en laissant immobile successivement l'une ou l'autre des deux extrémités; on a donc pour l'accroissement correspondant du quadrilatère

$$ds'' = k\psi\left(\frac{x}{2}\right) \left[\cos B dn - \cos D dn' \right], \quad (14)$$

où B et D représentent les angles extérieurs marqués sur la figure. Quant à la différentielle ds de l'aire du polygone, elle est donnée par l'équation $ds = ds' + ds''$, et la condition du maximum est $ds' + ds'' = 0$. Les valeurs précédentes (13) et (14) peuvent être simplifiées, mais nous devons de nouveau distinguer différents cas suivant que les rayons AB et CD sont concourants, non-sécants ou parallèles. Dans tous ces cas la distance BD devant rester invariable pendant le mouvement, on doit avoir aussi

$$\frac{dn}{\sin D} = \frac{dn'}{\sin B};$$

c'est seulement la mise en œuvre de cette condition qui varie suivant les diverses hypothèses.

En premier lieu si les rayons AB, CD concourent en O, ce point servira d'origine aux segments rectilignes $OA = \alpha$, $OB = \beta$, etc.; on a par la Trigonométrie

$$\frac{\sin D}{\sin B} = \frac{\varphi(\beta)}{\varphi(\delta)}, \quad (15)$$

ou

$$dn = \omega\varphi(\beta), \quad dn' = \omega\varphi(\delta); \quad (16)$$

puis encore

$$\begin{aligned} f(\delta) &= f(\beta)f(x) - \varphi(\beta)\varphi(x)\cos B, \\ f(\beta) &= f(\delta)f(x) - \varphi(\delta)\varphi(x)\cos D, \end{aligned}$$

et, par soustraction,

$$\begin{aligned} \varphi(\beta) \cos B - \varphi(\delta) \cos D &= [f(\beta) - f(\delta)] \frac{1 + f(x)}{\varphi(x)} \\ &= \frac{f(\beta) - f(\delta)}{\psi\left(\frac{x}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (17)$$

En portant dans ds' et ds'' les valeurs (16) et (17), la condition du maximum devient

$$\varphi(\beta) \psi\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) + f(\beta) = \varphi(\delta) \psi\left(\frac{\gamma - \delta}{2}\right) + f(\delta),$$

ce qui est une autre forme de l'équation (9).

En second lieu, si les rayons AB, CD sont non-sécants, soient O et O' les pieds de la perpendiculaire commune servant d'origine respectivement aux segments OA = α , OB = β , O'C = γ , O'D = δ . La figure BDOO' est un trapèze rectangle en O et O'; on a alors, comme on sait,

$$\frac{\sin D}{\sin B} = \frac{f(\beta)}{f(\delta)},$$

ou

$$dn = \omega f(\beta), \quad dn' = \omega f(\delta), \quad (18)$$

puis

$$\begin{aligned} \varphi(\delta) &= f(x) \varphi(\beta) - \varphi(x) f(\beta) \cos B, \\ \varphi(\beta) &= f(x) \varphi(\delta) - \varphi(x) f(\delta) \cos D, \end{aligned}$$

et en procédant comme dans le premier cas,

$$[f(\beta) \cos B - f(\delta) \cos D] \psi\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi(\beta) - \varphi(\delta). \quad (19)$$

En substituant les valeurs (18) et (19) dans ds , on obtient après suppression du facteur ω

$$f(\beta) \psi\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) + \varphi(\beta) = f(\delta) \psi\left(\frac{\gamma - \delta}{2}\right) + \varphi(\delta),$$

équation identique à (10).

Si enfin les droites AB, CD sont parallèles, on a, par un calcul analogue, en comptant les segments α , β , γ , δ de

deux points O et O' tels que leur ligne de jonction coupe ces parallèles sous le même angle,

$$dn = \omega e^{\frac{\beta}{k}}, \quad dn' = \omega e^{\frac{\delta}{k}}, \quad (20)$$

puis

$$f(x) - \varphi(x) \cos B = e^{\frac{\delta - \beta}{k}},$$

$$f(x) - \varphi(x) \cos D = e^{\frac{\beta - \delta}{k}},$$

et par suite

$$\left[e^{\frac{\beta}{k}} \cos B - e^{\frac{\delta}{k}} \cos D \right] \psi\left(\frac{x}{2}\right) = e^{\frac{\beta}{k}} - e^{\frac{\delta}{k}}. \quad (21)$$

Les valeurs précédentes (20) et (21) introduites dans ds' et ds'' donnent pour condition du maximum

$$e^{\frac{\beta}{k}} \left(\psi\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) + 1 \right) = e^{\frac{\delta}{k}} \left(\psi\left(\frac{\gamma - \delta}{2}\right) + 1 \right),$$

ce qui est conforme à l'équation (11).

En résumé, dans tous les cas, la condition du maximum se réduit à ce que le quadrilatère doit être inscriptible dans un cycle. Si au lieu d'un quadrilatère on considère un polygone quelconque, la condition reste la même. C'est ce qu'on verra en prenant comme variables les diagonales issues d'un même sommet A; en faisant varier une seule de ces lignes, on voit qu'un cycle doit passer par A et les trois sommets contigus du polygone; ce dernier est donc inscrit dans le cycle.

Les calculs qui précèdent n'achèvent pas le problème du maximum, car s'il est vrai que la condition obtenue soit nécessaire, il ne s'ensuit pas qu'elle soit suffisante. En la supposant telle, il faut encore s'assurer que le polygone trouvé est maximum et non minimum, et reconnaître enfin s'il existe d'autres maxima ou minima répondant aux valeurs extrêmes des diagonales qui sont ici limitées par l'obligation où l'on est de construire avec elles un polygone de côtés donnés. Si on astreint le polygone à rester convexe dans ses diverses configurations, on démontre aisément que le

polygone inscrit fournit un maximum de la surface et qu'il n'y en a pas d'autres; des minima sont obtenus quand un ou plusieurs côtés se placent en ligne droite.

Ces conclusions ne sont pas modifiées si on autorise des dispositions concaves; mais dans le cas des formes étoilées, — qui exige la généralisation de la notion de surface, — on aura des maxima et minima correspondant aux divers cas d'inscription. La description et le classement de tous les résultats est un problème sans doute fort difficile et qui sort du cadre de cet article.

C. CAILLER (Genève).

UNE LEÇON DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE SUR L'EMPLOI DES QUANTITÉS IMAGINAIRES

PROBLÈME. On donne dans le plan horizontal un cercle c dont le centre M se trouve sur la ligne de terre LT et une droite d perpendiculaire à LT . Par le point A de c , situé sur LT , on mène un plan quelconque α normal au plan horizontal, coupant c pour la seconde fois en B et d en C ; puis on s'imagine en α le cercle c_α dont BC est un diamètre. Construire en un point quelconque P de c_α le plan tangent π à la surface S , lieu de c_α quand α tourne autour de la droite α du plan vertical, normale en A à LT .

1. On trouve le plan cherché π à l'aide de la tangente t en P à c_α et la tangente en P à une autre courbe plane de S passant par P . Dans la première et la seconde des trois solutions qui suivent, nous choisissons pour le plan de cette seconde courbe successivement le plan de front par P et le plan par P et d . Il sera alors facile de déterminer cette tangente dans les deux cas indiqués, dès qu'on connaît l'ordre de S et la nature de sa section avec le plan α_∞ à l'infini. Enfin la nature particulière de la surface S nous suggérera une troisième solution, la plus simple de toutes.

2. *Ordre de la surface S .* — Le plan horizontal ne contient