Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 11 (1909)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE THÉORÈME DE PYTHAGORE EN MÉTAGÉOMÉTRIE
Autor: Barbarin, P.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-11872

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

l'étude produira d'importants résultats en même temps qu'il ouvrira un domaine immense aux recherches des savants. Les lois numériques, — particulièrement celles des nombres premiers, — plus savamment attaquées, livreront de plus en plus leurs secrets, et l'idée de nombre entier paraîtra si primordiale qu'on pensera à en faire la base de toute l'analyse mathématique.

Quoique la littérature arithmétique nous soit assez connue, le caractère élémentaire que nous avons tenu à laisser à la présente notice, et surtout la défiance que nous avons de nos modestes lumières, ne nous permettent pas d'en dire davantage sur cet important sujet, dont nous avons voulu seulement essayer d'expliquer les origines.

A. Aubry (Dijon).

LE THÉORÈME DE PYTHAGORE EN MÉTAGÉOMÉTRIE

Dans un article publié au 42e volume du *Journal de Crelle* (année 1851, page 280), et paru la veille de sa mort, Gudermann donnait pour le triangle rectangle sphérique de côtés a, b, c l'énoncé et la démonstration d'un théorème analogue à celui de Pythagore pour le triangle rectangle plan. Si S, S′ et S″ sont les aires des carrés ayant pour côtés respectifs a, b et c, le théorème de Gudermann peut s'exprimer par la relation

$$\mathrm{L}\left(\frac{1}{4}\,\mathrm{S}\right) = \mathrm{L}\left(\frac{1}{4}\,\mathrm{S}'\right) + \mathrm{L}\left(\frac{1}{4}\,\mathrm{S}''\right),$$

en posant pour abréger,

$$\mathrm{L}\,(x) = \log\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} = \mathrm{Arg.}\ th\,(\sin x)\ .$$

Le numéro de février 1907 de l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* rappelle, page 48, le calcul de Gudermann sous le titre : *Novissima verba.* (Question 3121).

Si je me permets de revenir sur ce point assez intéressant, c'est qu'il est utile de l'appliquer à la métagéométrie, et de montrer qu'on peut lui faire revêtir une assez grande variété de formes diverses.

En effet, la géométrie générale nous offre d'abord plusieurs sortes de triangles qui ont des propriétés similaires de celles du triangle pythagoricien : Ce sont

1° le triangle rectangle (a hypoténuse, b et c, cathètes), relation :

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c \ ,$$

ou

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \,.\, \operatorname{ch} c \ .$$

2° le triangle inscrit dans un demi-cercle (a diamètre), relation :

$$\sin^2 \frac{a}{2} = \sin^2 \frac{b}{2} + \sin^2 \frac{c}{2} \ ,$$

ou

$$\operatorname{sh}^2 \frac{a}{2} = \operatorname{sh}^2 \frac{b}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{c}{2} \ .$$

3° le triangle formé avec les deux côtés principaux de l'angle droit et la diagonale principale (diagonale intermédiaire), dans un quadrilatère trirectangle, relation :

$$\operatorname{tg}^2 a = \operatorname{tg}^2 b + \operatorname{tg}^2 c \ ,$$

ou

$$\operatorname{th}^2 a = \operatorname{th}^2 b + \operatorname{th}^2 c \ .$$

4° le triangle formé avec la même diagonale principale et les deux autres côtés du même quadrilatère, relation :

$$\sin^2 a = \sin^2 b + \sin^2 c \ ,$$

ou

$$\operatorname{sh}^2 a = \operatorname{sh}^2 b + \operatorname{sh}^2 c \ .$$

Il est clair d'ailleurs que le triangle (4) a pour côtés les moitiés de ceux d'un autre triangle inscriptible dans un demi-

cercle (2). En géométrie euclidienne, ces quatre formes de triangles se réduisent à une seule.

Pour obtenir une traduction métagéométrique de la proposition de Pythagore, il suffit de concevoir une figure plane élémentaire dans laquelle une fonction simple de l'aire, $f(S)$, puisse être égale soit à $\log \cos a$, soit à $\sin^2 \frac{a}{2}$ ou $\sin^2 a$, soit enfin à $\operatorname{tg}^2 a$, et d'en faire autant pour b et c dans un des triangles qui précèdent ; on a alors

$$f(S) = f(S') + f(S'') ,$$

qui est la traduction demandée.

Par exemple, l'aire du cercle de rayon a étant exprimée par

$$S = 4\pi \sin^2 \frac{a}{2} \quad \text{ou} \quad S = 4\pi \operatorname{sh}^2 \frac{a}{2} ,$$

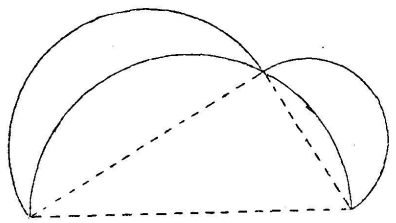
nous avons l'énoncé général :

Quand un triangle ABC est inscrit dans un demi-cercle, le cercle de rayon BC est équivalent à la somme des cercles de rayons AB et AC.

Cet énoncé devient encore plus saisissant sous la forme que voici :

Si BC et A sont un diamètre et un point quelconque d'une sphère, la somme des surfaces sphériques de diamètres AB et AC vaut celle de la sphère entière.

Cela tient à ce qu'en métagéométrie l'aire de la sphère égale aussi celle du cercle de rayon double. Le schéma ci-contre, qui rappelle la figure bien connue des *lunules* d'Hippocrate, symbolise à merveille le théorème pythagoricien, et a l'avantage sur la figure dite du *pont-aux-ânes* de demeurer indépendant du système de géométrie.



Mais revenons à la figure même de Pythagore, c'est-à-dire aux quadrilatères construits sur les côtés d'un triangle. Les quadrilatères simples, réguliers ou semi-réguliers que l'on peut construire en géométrie générale au moyen d'un longueur donnée l sont :

1° le *carré*, qui a tous ses côtés égaux à l, et ses quatre angles égaux entre eux. L'un d'eux étant désigné par ω,

$$\cos\omega = -\operatorname{tg}^2\frac{l}{2} \quad \text{ou} \quad \cos\omega = \operatorname{th}^2\frac{l}{2} \;;$$

l'aire S du carré vaut $4\varepsilon\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)$, ε étant pris égal à ± 1, suivant que l'on raisonne en géométrie Riemannienne ou sur le plan Lobatschefskien ; donc

$$\sin\frac{S}{4} = \operatorname{tg}^2\frac{l}{2} = \operatorname{th}^2\frac{l}{2} \;.$$

Dans ce calcul, l'unité d'aire est celle du trapèze hypercyclique ayant pour base l'unité naturelle U et pour équidistance la ligne V de sinus circulaire ou hyperbolique égal à 1.

La médiane m du carré est donnée par la relation

$$\sin\frac{m}{2} = \operatorname{tg}\frac{l}{2} \;,$$

et la diagonale d par

$$\sin\frac{d}{2} = \sqrt{2}\sin\frac{l}{2} \;;$$

par suite, on peut exprimer également l'aire S en fonction soit de m soit de d en écrivant

$$\sin\frac{S}{4} = \sin^2\frac{m}{2} \quad \text{ou} \quad \operatorname{sh}^2\frac{m}{2} \;,$$

et aussi

$$\operatorname{tg}\frac{S}{8} = \operatorname{tg}^2\frac{d}{4} \quad \text{ou} \quad \operatorname{th}^2\frac{d}{4} \;.$$

2° le *pseudo-carré*, qui est un losange dont tous les côtés sont égaux à l, mais qui a deux angles droits opposés à l'extrémité de la diagonale principale d, et deux autres angles égaux à l'extrémité de la diagonale secondaire d'.

Sa surface est évidemment la moitié de celle du carré qui a pour côté d', pour médiane d et pour diagonale $2l$; donc

$$\operatorname{tg}\frac{S}{4} = \operatorname{tg}^2\frac{l}{2} \quad \text{ou} \quad \operatorname{th}^2\frac{l}{2} \;,$$

$$\sin\frac{S}{2} = \sin^2\frac{d}{2} \quad \text{ou} \quad \operatorname{sh}^2\frac{d}{2} \;,$$

et

$$\sin\frac{S}{2} = \operatorname{tg}^2\frac{d'}{2} \quad \text{ou} \quad \operatorname{th}^2\frac{d'}{2} .$$

3° le *quadrilatère birectangle isocèle* qui a les trois côtés consécutifs des angles droits égaux à l. Son aire S est exprimée par

$$\operatorname{tg} S = 2\sin^2\frac{l}{2} \quad \text{ou} \quad 2\operatorname{sh}^2\frac{l}{2} .$$

Ces quadrilatères se réduisent aussi à un seul sur le plan euclidien.

En combinant les formes principales de triangles citées plus haut avec celles de ces quadrilatères on peut donc obtenir différents énoncés, au premier rang desquels se trouve précisément celui de Gudermann, qui pourrait aussi s'écrire d'ailleurs

$$\operatorname{Arg\,th}\left(\operatorname{tg}\frac{S}{8}\right) = \operatorname{Arg\,th}\left(\operatorname{tg}\frac{S'}{8}\right) + \operatorname{Arg\,th}\left(\operatorname{tg}\frac{S''}{8}\right) ,$$

S, S′, S″ étant les aires des carrés construits sur les côtés a, b, c d'un triangle rectangle.

Par exemple, si les côtés d'un triangle (2) inscriptible dans un demi-cercle sont pris pour médianes de carrés ou diagonales principales de pseudo-carrés, on a

$$\sin\frac{S}{4} = \sin\frac{S'}{4} + \sin\frac{S''}{4}$$

dans le premier cas, et

$$\sin\frac{S}{2} = \sin\frac{S'}{2} + \sin\frac{S''}{2} ,$$

dans le deuxième.

L'emploi du triangle (4) fournirait des résultats analogues.

Et encore, les aires des quadrilatères birectangles isocèles construits sur les trois côtés du triangle inscriptible sont liées par la relation

$$\operatorname{tg} S = \operatorname{tg} S' + \operatorname{tg} S''$$

qui donne, somme toute, la généralisation la plus simple du théorème de Pythagore.

Il doit d'ailleurs exister un triangle particulier tel que si sur chacun de ses côtés on construit un carré ou un des autres quadrilatères semi-réguliers, leurs aires satisfassent à la formule

$$S = S' + S''.$$

Il serait facile, au moyen des considérations qui précèdent, de calculer la relation qui doit exister entre les côtés de ce triangle, selon la nature du quadrilatère choisi.

P. Barbarin (Bordeaux).

SUR LE DERNIER THÉORÈME DE FERMAT
ET LE
CRITÉRIUM DE M. A. WIEFERICH

Dans un article intitulé *Zum letzten Fermatschen Theorem* (Journal f. reine u. angew. Mathematik, t. 136, p. 293-302), M. A. Wieferich vient de démontrer un théorème important sur lequel je désirerais attirer l'attention des lecteurs de l'*Enseignement mathématique*. En voici l'énoncé :

Si l'équation $x^p + y^p + z^p = 0$ *est possible en nombres entiers premiers à* p, *le quotient de* $2^{p-1} - 1$ *par* p *est divisible par* p.

L'impossibilité de l'équation de Fermat en nombres entiers premiers à p est donc établie par tous les nombres premiers p tels que $2^{p-1} - 1$ ne soit pas divisible par p^2. Elle est établie en particulier pour tous les nombres premiers de la forme $2^n \pm 1$, c'est-à-dire pour les nombres de Mersenne et leurs analogues et pour tous les nombres premiers p pour lesquels la division du cercle en p parties égales peut être faite avec la règle et le compas. L'importance de ce résultat n'échappera à personne.

M. Wieferich a déduit son critérium des congruences gé-