

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 11 (1909)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE BASÉE SUR LE GROUPE DES DÉPLACEMENTS  
**Kapitel:** Droite.  
**Autor:** Rousseau, Th.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-11850>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 07.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE BASÉE SUR LE GROUPE DES DÉPLACEMENTS

## I. — LES ROTATIONS

### Droite.

1. — Je suppose que le lecteur sait ce que c'est qu'un *ensemble continu* à 1, 2, 3... dimensions<sup>1</sup>.

Je rappelle qu'il est facile de construire des ensembles continus à 3 dimensions. Il suffit, par exemple, de prendre pour *éléments* les systèmes de 3 nombres  $x, y, z$ , que l'on peut former en donnant à  $x, y, z$ , toutes les valeurs possibles, deux éléments  $(x, y, z)$  et  $(x', y', z')$  étant égaux, par définition, si  $x = x', y = y', z = z'$ .

Je suppose également que le lecteur sait ce que c'est qu'une *transformation*, et aussi, ce que c'est qu'une *transformation continue* d'un ensemble continu à une ou plusieurs dimensions.

Je considère aussi comme connue la notion de *groupe* de transformations.

Cela posé, j'appelle *espace lobatschefskien* tout ensemble qui satisfait aux postulats suivants :

2. — *Postulat I.* Il est continu et à trois dimensions. J'appellerai *points* les éléments de cet ensemble. J'appellerai *ligne* un ensemble continu à une dimension, formé de points, et *surface* un ensemble continu à deux dimensions, formé de points.

3. — *Postulat II.* Parmi les transformations continues que peut subir l'espace, il y en a qui satisfont aux postulats suivants, numérotés de III à XI inclus ; je les appelle des *déplacements lobatschefskiens*.

4. — *Postulat III.* Il y a une infinité de déplacements lobatschefskiens. Ces déplacements forment un ensemble continu. Ils forment aussi un groupe, et par suite un groupe continu.

*Définition.* On dit que deux figures  $F$  et  $F'$  sont égales si on peut trouver un déplacement<sup>2</sup>  $D$  qui les amènent à coïncider, c'est-à-dire tel que

$$F' = F . D .$$

5. — THÉORÈME. *Deux figures égales à une même troisième sont égales entre elles.* Car les déplacements forment un groupe.

<sup>1</sup> On pourra consulter à ce sujet : Edward V. HUNTINGTON. *La Kontinuo*, traduction en espéranto de Raoul BRICARD (Gauthier-Villars).

<sup>2</sup> Je sous-entendrai désormais le mot *lobatschefskien*.

6. — *Postulat IV.* Etant donnés deux couples de points  $AB, A'B'$ , on ne peut pas, en général, trouver un déplacement qui amène  $A$  sur  $A'$  et  $B$  sur  $B'$ . Si on en peut trouver un, la figure réduite formée par les deux points  $A$  et  $B$  est égale à la figure réduite formée par les deux autres points  $A'$  et  $B'$ , : je dirai alors que la *distance* des deux points  $A$  et  $B$  est égale à la distance des deux points  $A'$  et  $B'$ . J'admets que, dans ce cas, on peut trouver un autre déplacement qui amène  $A$  sur  $B'$  et  $B$  sur  $A'$ .

En particulier étant donné deux points  $A$  et  $B$ , on peut trouver un déplacement qui amène  $A$  en  $B$  et  $B$  en  $A$ .

7. — *Postulat V.* Il y a une infinité de déplacements lobatschefskiens dans lesquels un point donné  $M$  reste à lui-même son homologue.

8. — *Postulat VII.* Il y a une infinité de déplacements lobatschefskiens dans lesquels deux points donnés  $A$  et  $B$  restent à eux-mêmes leurs homologues. Ces déplacements forment un ensemble continu, à une dimension, et fermé<sup>1</sup>.

De plus, dans chacun de ces déplacements il y a une infinité de points qui sont à eux-mêmes leurs homologues. Ces points forment un ensemble continu, à une dimension, illimité dans les deux sens, c'est-à-dire une ligne, que j'appelle *ligne droite* ou simplement *droite*.

Enfin, j'admets encore que la ligne des points qui restent fixes<sup>2</sup> est la même pour tous les déplacements qui laissent  $A$  et  $B$  fixes.

Tous ces déplacements qui laissent  $A$  et  $B$  fixes s'appellent des *rotations* autour de la droite  $D$  dont les points restent fixes, et qui s'appelle la *charnière*.

9. — THÉORÈME. *Par deux points donnés, il passe toujours une droite et une seule.*

Il résulte du postulat précédent qu'il en passe une. Je dis que toute droite  $D'$  définie par deux points  $A'$  et  $B'$  et qui passerait par  $A$  et  $B$  serait confondue avec  $D$ .

Soit en effet  $D$  un déplacement qui laisse fixe  $A' B'$ . Il laisse fixes aussi  $A$  et  $B$  puisque, par hypothèse,  $A$  et  $B$  sont sur la droite  $D'$ . Par suite, laissant fixes  $A$  et  $B$ , il laisse fixes tous les points de  $D$ . Dès lors tout point  $M$  de  $D$  est sur  $D'$ , puisqu'il reste fixe dans le déplacement  $D$ . De même tout point  $M'$  de  $D'$  restant fixe dans le déplacement  $D$ , qui laisse  $A$  et  $B$  fixes, est sur  $D$  et les deux droites sont confondues.

10. — THÉORÈME. *Toute rotation autour de  $D$  qui laisse fixe un point en dehors de  $D$ , est la rotation identique.* Car dans une rotation autre que la rotation identique, il n'y a que les points de  $D$  qui ne bougent pas.

<sup>1</sup> C'est-à-dire que les déplacements sont rangés de telle façon, que l'un quelconque d'entre eux se reproduit périodiquement dans la suite de ces déplacements.

<sup>2</sup> C'est-à-dire sont à eux-mêmes leurs homologues.

11. — *Corollaire I.* Tout déplacement qui laisse fixes trois points non en ligne droite est le déplacement identique.

Car deux des points A, B, C restant fixes, par exemple, A et B, le déplacement est une rotation autour de AB; le point C restant fixe et n'étant pas sur AB, la rotation est la rotation identique.

12. — *Corollaire II.* Si A', B', C' sont les homologues de A, B, C dans un déplacement D, il n'y a pas d'autre déplacement qui amène A en A', B en B' et C en C'.

Car s'il y en avait un autre D', le déplacement  $D'D^{-1}$  laisserait fixes les 3 points ABC non en ligne droite et on aurait  $D'D^{-1} = 1$ , d'où

$$D' = D.$$

13. — *Définitions.* Une droite étant un ensemble continu à une dimension, formé de points, elle peut être parcourue dans deux sens différents. Une droite sur laquelle on a choisi un sens s'appelle un *axe*.

Un point O d'une droite la partage en deux *semi-droites d'origine* O. Deux points A et B d'une droite déterminent une *portion de droite d'extrémités* A et B et formée de tous les points de la droite situés entre A et B.

14. — *Postulat VII.* Etant donnée une semi-droite OX d'origine O, on peut trouver un déplacement qui laisse le point O fixe, et qui amène la semi-droite OX à passer par un point quelconque M, choisi arbitrairement.

15. — *Corollaires.* I. Deux semi-droites sont égales.

16. — II. Deux droites sont égales.

17. — III. On peut retourner une droite sur elle-même, par un déplacement qui laisse fixe un point de la droite.

18. — IV. On peut trouver un déplacement qui amène une droite sur sa position primitive, sans que le sens des points soit changé, et de manière qu'un point A donné d'avance vienne sur un point A' donné d'avance sur la droite.

Il suffit de retourner le couple de points AA' sur lui-même, puis de retourner la droite sur elle-même en laissant A' fixe. Un tel déplacement s'appelle un *glissement* de la droite sur elle-même.

19. — *Définitions.* I. On dit que deux portions de droite AB et A'B' ont même *longueur*, quand elles sont égales.

II. Je définis ensuite comme d'ordinaire l'*inégalité* et la *somme* de deux longueurs.

20. THÉORÈME. *La somme de deux longueurs est commutative.*

Si AB et CD ont les extrémités B et C confondues, AD a pour longueur la somme des longueurs de AB et CD. En retournant d'abord AD sur lui-même puis AB et CD, la proposition se démontre aisément.

On en déduit que la somme de plusieurs longueurs est commutative et associative.

21. — *Postulat VIII.* Etant donnée une longueur AB quelconque et une longueur CD non nulle, on peut toujours trouver un entier  $n$  assez grand pour que  $AB > n \cdot CD$ .

22. — *Postulat IX.* Etant donnée une longueur AB, on peut toujours trouver une longueur CD telle que

$$AB = 2 \cdot CD.$$

Les longueurs sont donc des grandeurs directement mesurables<sup>1</sup>.

23. — **THÉORÈME.** *Quand on retourne une portion de droite sur elle-même, il y a un point qui ne bouge pas. Ce point s'appelle le milieu de la portion de droite.*

*Segments.* Ici se place la théorie classique des segments.

### Angles.

24. — *Définition.* J'appelle *angle* la figure formée par deux semi-droites ayant la même origine.

25. — *Postulat X.* Etant donnés deux angles  $xoy$ ,  $x'o'y'$ , on ne peut pas, en général, trouver un déplacement qui amène  $ox$  sur  $o'x'$  et  $oy$  sur  $o'y'$ . Si on peut en trouver un, on peut en trouver un autre qui amène  $ox$  sur  $o'y'$  et  $oy$  sur  $o'x'$ .

En particulier on peut retourner un angle sur lui-même.

26. — **THÉORÈME.** *Le déplacement qui retourne un angle sur lui-même est une rotation.*

Car, si nous portons sur les côtés deux longueurs égales  $OA = OB$ , le déplacement qui retourne l'angle sur lui-même retourne la portion de droite AB sur elle-même. Son milieu I ne bouge donc pas, et le déplacement est une rotation autour de OI.

La droite OI s'appelle la *bissectrice* de l'angle  $xoy$ .

*Remarque I.* Le carré de la rotation R qui retourne un angle sur lui-même est la rotation identique. Cette rotation R s'appelle une *transposition*.

27. — *Postulat XI.* Nous admettrons qu'il n'y a qu'une rotation autour d'une droite donnée dont le carré est la rotation identique, autrement dit qu'il n'existe qu'une transposition autour d'une droite donnée.

28. — **THÉORÈME.** *Deux angles opposés par le sommet  $xoy$ ,  $x'o'y'$  sont égaux.*

Car il suffit de retourner l'angle  $xoy'$  sur lui-même pour les faire coïncider.

<sup>1</sup> Voir : TANNERY, *Leçons d'Arithmétique*, chap. X et XIII.