Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 11 (1909)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE BASÉE SUR LE GROUPE DES DÉPLACEMENTS

Kapitel: Glissements plans rectilignes.

Autor: Rousseau, Th.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-11850

J'appelle *mouvement axial* un mouvement défini par des déplacements axiaux. Un tel mouvement est à deux paramètres. J'appelle mouvement *helicoïdal* un mouvement axial dans lequel l'angle de rotation varie proportionnellement à l'amplitude du glissement.

Après avoir défini deux plans perpendiculaires, on démontrera les théorèmes suivants :

73. — THÉORÈME. *Si deux plans sont perpendiculaires et si d'un point de l'un on abaisse la perpendiculaire D sur l'intersection, cette droite D est perpendiculaire à l'autre plan.*

74. — THÉORÈME. *Si deux plans sont perpendiculaires et si par un point de l'intersection on mène la perpendiculaire à l'un, elle est dans l'autre.*

75. — THÉORÈME. *Deux perpendiculaires à un même plan sont dans le même plan.*

76. — THÉORÈME. *Par un point pris hors d'un plan on peut abaisser sur ce plan une perpendiculaire et une seule.*

77. — THÉORÈME. *Si deux plans sont perpendiculaires et si d'un point de l'un on abaisse la perpendiculaire sur l'autre, elle est toute entière dans le premier.*

On étudiera ensuite les projections orthogonales, la symétrie, les perpendiculaires et les obliques, les triangles, les trièdres.

II. — LES TRANSLATIONS

Glissements plans rectilignes.

78. — *Définition.* J'appelle *espace euclidien,* tout espace lobatschefskien qui satisfait au postulat suivant.

79. — *Postulat XII. Le groupe des déplacements lobatschefskiens admet un sous-groupe invariant.*

Les déplacements d'un espace euclidien s'appelleront des *déplacements euclidiens.* Les déplacements du sous-groupe invariant s'appellent des *translations.*

Un *mouvement de translation* est un mouvement défini par un ensemble continu de translations.

80. — THÉORÈME. *Toute translation qui laisse un point fixe est la translation identique.*

Supposons qu'une translation T laisse fixe un point A. D'après un théorème précédent, cette translation serait équivalente à une rotation R_0, d'angle α autour d'un axe Δ_0 passant par A.

Je dis que, s'il en était ainsi, toute translation serait une rotation. En effet, une rotation R, d'angle α, autour d'un axe quelconque Δ, peut être considérée comme la transformée de la rotation R_0

par un des déplacements qui amènent Δ_0 sur Δ. Comme les translations forment un sous-groupe invariant, la rotation R serait encore une translation.

De plus, toutes les rotations d'angle α, 2α, ... $n\alpha$ seraient des translations, puisque les translations forment un groupe.

Je dis maintenant qu'une rotation R d'angle quelconque serait une translation. Pour le prouver, je vais montrer qu'on peut toujours considérer une rotation quelconque R d'angle ρ autour d'un axe Δ, comme le produit de deux rotations R_1 et R_2, d'angle α, autour de deux axes Δ_1 et Δ_2 concourants en O sur Δ. Si on construit en effet les droites D_1 et D_2 telles que

$$D_1 = D \, . \, R_1^{-\frac{1}{2}}$$

et

$$D_2 = D \, . \, R_2^{\frac{1}{2}}$$

on sait que Δ devra être perpendiculaire à D_1 et D_2 et $\rho = 2(D_1 , D_2)$ si $R = R_1 \, . \, R_2$.

Or le trièdre O, DD_1D_2 est isocèle ; ses faces sont égales à $\frac{\alpha}{2}$ et la base à $\frac{\rho}{2}$. Cherchons si on peut construire ce trièdre connaissant $\frac{\alpha}{2}$ et $\frac{\rho}{2}$. Si nous menons par D le plan DX perpendiculaire au plan D_1D_2, nous sommes ramenés à construire le trièdre rectangle DD_1X. Comme X est la projection de D_1 sur le plan DX, nous devons mener par le point O, dans le plan DX, une semi-droite D qui fasse avec D_1 un angle égal à $\frac{\alpha}{2}$; comme l'angle de D_1 avec X est égal à $\frac{\rho}{4}$ on sait que le problème est possible si

$$\frac{\rho}{4} < \frac{\alpha}{2} < 2^{dr} - \frac{\rho}{4} \, .$$

Si cette condition est remplie, la rotation donnée R serait le produit de deux rotations R_1 et R_2 d'angle α. Comme ces rotations seraient des translations, et que les translations forment un groupe, R serait une translation.

Si la condition précédente n'est pas remplie, on peut trouver une rotation R' d'angle $\rho' = \frac{\rho}{n}$ telle que l'on ait :

$$\frac{\rho'}{4} < \frac{\alpha}{2} < 2^{dr} - \frac{\rho'}{4}$$

en prenant n assez grand. Alors la rotation R' serait une translation et il en serait de même de la rotation $R = R'^n$.

Donc, si une translation laissait fixe un point A, sans être la translation identique, toutes les rotations seraient des translations. Par suite un déplacement quelconque serait aussi une translation, puisque tout déplacement est le produit de deux rotations; et le groupe des translations ne serait pas un sous-groupe du groupe des déplacements, mais ce groupe lui-même.

81. — *Corollaire*. Il y a une translation et une seule qui amène un point A en un point donné A'.

Soit T_0 une translation quelconque qui amène un point quelconque M en M'. On peut toujours construire un triangle isocèle AA″A' ayant AA' pour base et tel que AA″ = A'A″ = MM'. Effectuons un déplacement qui amène MM' sur AA″. La translation T_0 se transforme en une translation qui amène A en A″ puisque les translations forment un sous-groupe invariant. De même il y a une translation T″ qui amène A″ sur A'. Donc A' provient de A par le produit T'T″, c'est-à-dire par une translation T.

Il n'y a qu'une translation T qui amène A sur A'. S'il y en avait une autre T_1 la translation T_1T^{-1} laisserait A fixe. Ce serait la translation identique et on aurait $T = T_1$.

Une translation est donc clairement désignée par deux points homologues.

82. — *Remarque*. Pour définir un mouvement de translation il suffit de se donner un ensemble continu de points M' homologues de M et comprenant le point M. Le mouvement peut donc être à 3, 2, 1 paramètres. S'il est à un paramètre, il suffit de se donner la trajectoire du point M. Si cette trajectoire est rectiligne le mouvement de translation est dit *mouvement de translation rectiligne*.

83. — THÉORÈME. *Dans une translation, toute droite qui joint deux points homologues glisse sur elle-même.*

Soient la translation T et un point A. Posons B = AT et C = BT. Désignons par R une rotation quelconque autour de AB de sorte que A = AR, B = BR, C' = CR. Puisque les translations forment un sous-groupe invariant, la transformée de T par R est une translation T', telle que B = AT' et C' = BT'. D'où :

$$B = BT^{-1}T'.$$

Donc $T^{-1}T'$ est la translation identique. Par suite, comme on a aussi $C' = CT^{-1}T'$, C' et C sont confondus. Donc C est sur la charnière AB.

84. — *Corollaire*. Dans un mouvement de translation rectiligne

tous les points décrivent des droites. On appelle ces droites des *glissières*.

THÉORÈME. *Dans une translation, tout plan qui passe par une glissière glisse sur lui-même.*

Considérons en effet la translation T qui amène M en M′. Soit P un semi-plan d'arête MM′, P′ sa position homologue. P′ dérive de P par un mouvement axial $A = GR$, G étant le mouvement de glissement plan rectiligne de P et de MM′ sur eux-mêmes, et d'amplitude MM′, R le mouvement de rotation d'angle α qui amène P sur P′. Considérons le mouvement de translation rectiligne MM′. Puisqu'il est défini par un ensemble continu de translations, α varie d'une manière continue dans ce mouvement et on peut trouver un nombre entier n assez grand tel que α passe par la valeur $\frac{4dr}{n}$ comprise entre zéro et α. A cet instant le point M est venu en M_1 entre MM′, tel que $MM_1 = a$, par un mouvement de translation T_0, qui est un mouvement axial d'amplitude a et d'angle $\frac{4dr}{n}$. Dès lors, le mouvement de translation T^n sera un mouvement axial d'amplitude na et d'angle $4dr$, et par suite sera équivalent à un glissement plan rectiligne.

Donc toutes les translations d'amplitude na sont des glissements plans rectilignes. Si nous construisons dans le semi-plan P le triangle isocèle MM″M′ de base MM′ et de côtés na, la translation MM″ est un glissement plan rectiligne ; de même la translation M″M′. Le produit de ces deux translations, c'est-à-dire la translation MM′ est donc aussi un glissement plan rectiligne.

Tout plan passant par une glissière s'appelle un *plan de glissement.*

85. — THÉORÈME. *La transformée d'une translation par une transposition autour d'une perpendiculaire à un plan de glissement est la translation inverse.*

Soit O est le pied de la perpendiculaire Oz sur le plan P, et T une translation. Soit $O' = OT$. La transposition autour de Oz laisse O fixe et amène O′ en O'_1 dans le plan P. O'_1 est symétrique de O′ par rapport à O. La transformée de T est la translation qui amène O en O'_1 ; c'est manifestement la translation inverse de T.

86. — THÉORÈME. *Le produit de deux translations est commutatif.*

Soit en effet T une translation qui amène O en O′. Puis T′ une translation qui amène O′ en O″. Faisons la transposition autour de la perpendiculaire au milieu de O′O″, au plan OO′O″. O vient en O″, O″ en O et O′ en O_1. Or la translation qui amène O en O'_1 est la transformée de celle qui amène O″ en O′, c'est donc l'inverse de T'^{-1}, c'est-à-dire T′. De même la translation qui amène O'_1 en O″ est égale à T. Donc $TT' = T'T$.