

SUR LES TRANSLATIONS

Autor(en): **Bichard, J.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1909)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-11851>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR LES TRANSLATIONS

On peut étudier le groupe des translations en lui-même et sans faire intervenir d'autres mouvements, comme l'a fait M. BOURLET (*Nouv. Annales de Math.*, année 1905). Il faut alors admettre cet axiome : La résultante de deux translations ne dépend pas de l'ordre de composition.

Dans un exposé complet de la Géométrie on introduit d'autres mouvements. L'axiome précédent est inutile. J'indique ici une façon d'exposer les choses.

On peut définir le *mouvement* : « une *transformation* changeant une figure en une autre figure *égale* ». La notion de figures *égales* est alors regardée comme indéfinissable. On peut au contraire considérer le *mouvement* comme non définissable. On nomme alors figures *égales* deux figures « *transformables l'une dans l'autre par un mouvement* ». Admettons maintenant les *axiomes suivants* :

I. « Deux figures égales à une troisième sont égales entre elles » ou « La résultante [*le produit*] de deux mouvements est un mouvement » ou encore « Les mouvements forment un groupe ».

II. Un segment AB est égal à BA , un angle AOB est égal à BOA .

Ceci peut se démontrer. (Voir la *thèse* de M. GÉRARD, *au commencement*.) On l'admettra ici. On admettra aussi que si les points B et C sont respectivement sur les demi-droites AX et DY , et si $AB = DC$, le mouvement amenant AX sur DY amène aussi B sur C . Un axiome analogue sur les angles s'énoncera facilement.

III. Si on a un plan P , et dans ce plan une demi-droite OD , il existe un mouvement changeant OD en la demi-droite opposée OD' et changeant l'un dans l'autre chacun des deux demi-plans dans lesquels $D'OD$ divise P .

IV. Soit AD une demi-droite, P un demi-plan limité par

AD, B un point de AD. Il existe un mouvement changeant A en B, n'altérant pas P, et amenant la demi-droite AD sur la demi-droite BD. On le nomme *translation*.

V. Il existe *une seule* translation amenant A en B. [Elle conserve donc *tous* les demi-plans passant par AB.]

VI. Les translations AB et BC faites successivement équivalent à la translation AC. [*Cet axiome équivaut au Postulat d'Euclide.*]

Ces axiomes admis, je vais démontrer une suite de propositions. Toutefois, je ferai encore la *remarque suivante* :

VII. Les mouvements changent les droites en droites (car la figure égale à une droite est une droite ; si donc un mouvement change une demi-droite OA en une demi-droite OB, il changera la demi-droite opposée à OA en la demi-droite opposée à OB.

Proposition I. Les angles opposés par le sommet sont égaux.

Soient les deux droites AOC, BOD qui se coupent en O. Je dis que $\angle AOB = \angle COD$. D'après l'axiome II, il existe un mouvement amenant OB sur OC et OC sur OB. D'après l'axiome VII, ce même mouvement amène OD sur OA et OA sur OD. Ce mouvement amène donc BOA sur COD donc $\angle BOA = \angle COD$. D'après l'axiome II, $\angle BOA = \angle AOB$ donc $\angle AOB = \angle COD$ (axiome I). C. Q. F. D.

[Cette démonstration est identique à celle donnée par M. HADAMARD.]

Proposition II. La transformation dont il est question dans l'axiome III, qui n'altère pas le plan P, et amène la demi-droite OD du plan P sur son prolongement, amène toute autre demi-droite OE située dans P et passant par O sur son prolongement.

En effet, les angles opposés par le sommet DOE, D'OE' étant égaux, il existe une transformation amenant OD sur OD' et OE sur OE'. C'est bien la transformation de l'axiome III. (*Demi-tour* autour du point O.)

Proposition III. Si une translation change A en C et B en D, les deux angles BAD et ADC (alternes internes) sont égaux.

Soit DY le prolongement de CD , DZ celui de AD . La translation AC change la direction AB en la direction CD , puis la translation CD change la demi-droite CD en DY . Comme d'après l'axiome VI ces deux translations équivalent à la translation AD , cette dernière translation change la demi-droite AB en DY . Mais cette translation change AD en DZ , donc elle change l'angle BAD en YDZ , $BAD = YDZ$, mais $YDZ = ADC$ (opposés par le sommet), donc $BAD = ADC$ (axiome I). C. Q. F. D.

Proposition IV. CD étant, comme dans ce qui précède, le transformé de AB par une translation, les deux triangles ABD et DCA sont égaux.

Faisons subir au triangle ACD un demi-tour autour de A , ce triangle viendra en AGF , de façon que $GF = CD$ et par suite $GF = AB$, l'angle GFA sera égal à ADC et par suite à BAD (théorème précédent), de plus $AF = AD$.

La translation FA amènera F en A , A en D , G en B puisque $FG = AB$ et que $GFA = BAD$. Le triangle ACD est donc ainsi transporté sur DBA .

Proposition V. Si la translation AC amène le segment AB sur CD , la translation AB amène le segment AC sur le segment BD .

Soit BT le prolongement de AB . Pour démontrer la proposition énoncée il suffit de faire voir : 1° que $AC = BD$, 2° que l'angle TBD est égal à l'angle BAC . [La proposition résultera alors de la deuxième partie de l'axiome II.]

D'abord l'égalité $AC = BD$ résulte de l'égalité démontrée ci-dessus des deux triangles ABD et DCA .

Soit CX le prolongement de AC , CH le prolongement de DC .

La translation AC amène l'angle BAC sur DCX , donc $BAC = DCX$.

DCX et ACH sont égaux comme opposés par le sommet ; donc $BAC = ACH$, mais la superposition des triangles DCA et ABD amène DC sur AB et par suite CH sur BT , elle amène AC sur DB , donc elle amène l'angle ACH sur l'angle TBD , donc $ACH = TBD$, donc BAC , qui est égal à ACH , est aussi égal à TBD .

La proposition se trouve ainsi démontrée.

Proposition VI. Le produit de deux translations est indépendant de leur ordre : La translation AD est la résultante des translations AC et CD, c'est-à-dire AC et AB, car (proposition V) la translation AB et la translation CD n'en font qu'une.

La translation AD est aussi la résultante de AB et de AC, car AC amène B en D par hypothèse. Donc la résultante de AB et de AC est la même que celle de AC et de AB.

*
* *
*

Ce qui précède permet de faire immédiatement la théorie des équipollences, puis toute la géométrie projective.

Le théorème sur la somme des angles d'un triangle est presque immédiat. La notion de produit interne peut être introduite sans difficulté. De là on passe à la trigonométrie.

Cette manière de traiter la Géométrie peut donc sembler plus simple, plus économique, pour ainsi dire, que la manière classique.

Je ne veux cependant pas trancher la question de la façon d'exposer la Géométrie. Dans une exposition, la nature des axiomes admis, l'ordre des propositions me paraissent chose secondaire. La Géométrie est et doit rester un modèle de logique, car c'est là la raison d'être de son enseignement, c'est la cause de sa valeur éducative. Des démonstrations bien faites, une distinction nette entre ce qui est raisonnement et ce qui ne l'est pas, voilà ce qui est essentiel. On ne doit pas décorer du nom de démonstration, un assemblage de phrases cachant des faits intuitifs. Si un exposé remplit ces conditions, il ne faussera pas l'esprit de l'élève. Il y a sans doute des modes d'exposition préférables à d'autres, mais tous ceux remplissant les conditions précédentes sont bons.

J. RICHARD (Dijon).
