

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 11 (1909)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA CONSTRUCTION DU POLYGONE RÉGULIER A 17 COTÉS
Autor: W.H. Young
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-11852>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 07.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR LA CONSTRUCTION DU POLYGONE RÉGULIER A 17 COTÉS

1. — Dans le livre bien connu intitulé « *Questioni Riguardanti la Geometria Elementare* » publié sous la direction de M. ENRIQUES, et récemment traduit en allemand¹, on trouve un chapitre sur la construction du polygone régulier à 17 côtés. L'auteur M. DANIELE, examine plusieurs constructions géométriques ; il signale comme particulièrement réussie la résolution analytique élémentaire de M. PADOA.

Je me propose de montrer ici, très brièvement, comment on peut résoudre la partie analytique du problème par une méthode beaucoup plus simple et plus élémentaire que celles que l'on trouve dans le livre de M. ENRIQUES.

2. — Il s'agit de construire l'angle $\frac{2\pi}{17}$, ou, ce qui revient au même, de montrer comment l'on peut trouver algébriquement le cosinus de cet angle par la résolution d'une suite d'équations du second degré.

Si nous remarquons que

$$\cos 16 \left(\frac{2\pi}{17} \right) = \cos \frac{2\pi}{17}, \quad \text{ou bien} \quad \cos 4 \left(\frac{8\pi}{17} \right) = \cos \frac{2\pi}{17}.$$

relation qui est de la même forme que l'identité

$$\cos 4 \left(\frac{2\pi}{17} \right) = \cos \frac{8\pi}{17},$$

nous sommes conduits à poser

$$x_1 = 2 \cos \frac{2\pi}{17}, \quad x_2 = 2 \cos \frac{8\pi}{17}$$

et l'on a

$$x_2 = x_1^4 - 4x_1^2 + 2, \quad \text{et} \quad x_1 = x_2^4 - 4x_2^2 + 2.$$

¹ *Fragen der Elementargeometrie*. II. Teil, Leipzig, 1907.

Retranchons membre à membre et divisons par $x_1 - x_2$, nous obtenons

$$-1 = p(p^2 - 2q - 4), \quad (1)$$

après avoir posé

$$p = x_1 + x_2, \quad \text{et} \quad q = x_1 x_2,$$

Si au contraire on fait la soustraction après avoir multiplié préalablement la première équation par x_2 et la seconde par x_1 , on obtient après la division,

$$p = -q(p^2 - q - 4) + 2. \quad (2)$$

Entre les équations (1) et (2) on élimine q , d'où

$$4p^2(2 - p) - p^2(p^2 - 4)^2 + 4 = 0. \quad (3)$$

Le même raisonnement nous montre que l'équation (3) est satisfaite par

$$p = 2 \cos \frac{2\pi}{15} + 2 \cos \frac{8\pi}{15} = 2 \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

Donc le premier membre de (3) est divisible par

$$2p - \sqrt{5} - 1,$$

et par conséquent par

$$(2p - 1)^2 - 5,$$

c'est-à-dire par

$$p^2 - p - 1.$$

Il s'en suit que p satisfait l'équation

$$p^4 + p^3 - 6p^2 - p + 1 = 0, \quad (4)$$

ou bien

$$p^2 + \frac{1}{p^2} - 6 + p - \frac{1}{p} = 0;$$

on a donc

$$z^2 + z - 4 = 0, \quad \text{avec} \quad z = p - \frac{1}{p}. \quad (5)$$

Les équations (5) et (4) nous donnent immédiatement la solution algébrique désirée.

En écrivant l'équation (4) sous la forme

$$\frac{4p - 4p^3}{1 - 6p^2 + p^4} = 4,$$

on déduit

$$\text{tang } 4\theta = 4, \quad \text{où} \quad \text{tang } \theta = p,$$

ce qui nous donne une solution géométrique du problème proposé.

3. — Une méthode tout à fait analogue montre, encore plus facilement, que la résolution du problème de la construction du polygone régulier à 13 côtés conduit à une équation cubique. En posant

$$x_1 = 2 \cos \frac{\pi}{13}, \quad x_2 = 2 \cos \frac{5\pi}{13},$$

l'on aura

$$x_2 = x_1^5 - 5x_1^3 + 5x_1, \quad x_1 = x_2^5 - 5x_2^3 + 5x_2;$$

en introduisant

$$p = x_1 + x_2, \quad q = x_1 x_2,$$

on trouve facilement

$$\begin{aligned} -5 &= (p^2 - 2q)(p^2 - 2q - 5) - q^2, \\ -1 &= q(p^2 - 2q - 5), \end{aligned}$$

d'où

$$(q - 1)(q^3 + q^2 - 4q + 1) = 0, \text{ etc.}$$

4. — Pour terminer je voudrais appeler l'attention des lecteurs sur la solution élégante de la partie géométrique du problème de la construction du polygone régulier à 17 côtés donnée par M. RICHMOND de Cambridge¹.

Il part des équations,

$$\begin{aligned} 2 \cos \frac{6\pi}{17} + 2 \cos \frac{10\pi}{17} &= \text{tang } y, \\ 2 \cos \frac{6\pi}{17} \times 2 \cos \frac{10\pi}{17} &= \text{tang} \left(y - \frac{\pi}{4} \right), \end{aligned}$$

où $4y$ est l'angle aigu dont la tangente est 4 ; il les démontre par la méthode de Gauss ; mais elles résultent immédiatement de l'analyse que j'ai donnée.

La figure que donne M. Richmond est très simple et la construction très rapide.

W. H. YOUNG (de Cambridge et Liverpool, Angleterre).

¹ H.-W. RICHMOND, *Quart. Journ. of Math.*, Vol. XXVI, p. 206, 1892.