SUR LA CONSTRUCTION DU POLYGONE RÉGULIER A 17 COTÉS

1. — Dans le livre bien connu intitulé « Questioni Riguardenti la Geometria Elementare » publié sous la direction de M. Enriques, et récemment traduit en allemand[1], on trouve un chapitre sur la construction du polygone régulier à 17 côtés. L'auteur M. Daniele, examine plusieurs constructions géométriques ; il signale comme particulièrement réussie la résolution analytique élémentaire de M. Padoa.

Je me propose de montrer ici, très brièvement, comment on peut résoudre la partie analytique du problème par une méthode beaucoup plus simple et plus élémentaire que celles que l'on trouve dans le livre de M. Enriques.

2. — Il s'agit de construire l'angle $\frac{2\pi}{17}$, ou, ce qui revient au même, de montrer comment l'on peut trouver algébriquement le cosinus de cet angle par la résolution d'une suite d'équations du second degré.

Si nous remarquons que

$$\cos 16\left(\frac{2\pi}{17}\right) = \cos\frac{2\pi}{17}, \quad \text{ou bien} \quad \cos 4\left(\frac{8\pi}{17}\right) = \cos\frac{2\pi}{17}.$$

relation qui est de la même forme que l'identité

$$\cos 4\left(\frac{2\pi}{17}\right) = \cos\frac{8\pi}{17},$$

nous sommes conduits à poser

$$x_1 = 2\cos\frac{2\pi}{17}, \qquad x_2 = 2\cos\frac{8\pi}{17}$$

et l'on a

$$x_2 = x_1^4 - 4x_1^2 + 2, \quad \text{et} \quad x_1 = x_2^4 - 4x_2^2 + 2.$$

[1] *Fragen der Elementargeometrie*. II. Teil, Leipzig, 1907.

Retranchons membre à membre et divisons par $x_1 - x_2$, nous obtenons

$$-1 = p(p^2 - 2q - 4), \tag{1}$$

après avoir posé

$$p = x_1 + x_2, \qquad \text{et} \qquad q = x_1 x_2,$$

Si au contraire on fait la soustraction après avoir multiplié préalablement la première équation par x_2 et la seconde par x_1, on obtient après la division,

$$p = -q(p^2 - q - 4) + 2. \tag{2}$$

Entre les équations (1) et (2) on élimine q, d'où

$$4p^2(2 - p) - p^2(p^2 - 4)^2 + 1 = 0. \tag{3}$$

Le même raisonnement nous montre que l'équation (3) est satisfaite par

$$p = 2\cos\frac{2\pi}{15} + 2\cos\frac{8\pi}{15} = 2\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Donc le premier membre de (3) est divisible par

$$2p - \sqrt{5} - 1,$$

et par conséquent par

$$(2p - 1)^2 - 5,$$

c'est-à-dire par

$$p^2 - p - 1.$$

Il s'en suit que p satisfait l'équation

$$p^4 + p^3 - 6p^2 - p + 1 = 0, \tag{4}$$

ou bien

$$p^2 + \frac{1}{p^2} - 6 + p - \frac{1}{p} = 0;$$

on a donc

$$z^2 + z - 4 = 0, \qquad \text{avec} \qquad z = p - \frac{1}{p}. \tag{5}$$

Les équations (5) et (1) nous donnent immédiatement la solution algébrique désirée.

En écrivant l'équation (4) sous la forme

$$\frac{4p - 4p^3}{1 - 6p^2 + p^4} = 4,$$

on déduit

$$\text{tang } 4\theta = 4 \ , \qquad \text{où} \qquad \text{tang } \theta = p \ ,$$

ce qui nous donne une solution géométrique du problème proposé.

3. — Une méthode tout à fait analogue montre, encore plus facilement, que la résolution du problème de la construction du polygone régulier à 13 côtés conduit à une équation cubique. En posant

$$x_1 = 2 \cos \frac{\pi}{13} \ , \qquad x_2 = 2 \cos \frac{5\pi}{13} \ ,$$

l'on aura

$$x_2 = x_1^5 - 5x_1^3 + 5x_1 \ , \qquad x_1 = x_2^5 - 5x_2^3 + 5x_2 \ ;$$

en introduisant

$$p = x_1 + x_2 \ , \ q = x_1 x_2 \ ,$$

on trouve facilement

$$\begin{aligned} -5 &= (p^2 - 2q)(p^2 - 2q - 5) - q^2, \\ -1 &= q(p^2 - 2q - 5) \ , \end{aligned}$$

d'où

$$(q - 1)(q^3 + q^2 - 4q + 1) = 0 \ , \ \text{etc.}$$

4. — Pour terminer je voudrais appeler l'attention des lecteurs sur la solution élégante de la partie géométrique du problème de la construction du polygone régulier à 17 côtés donnée par M. Richmond de Cambridge[1].

Il part des équations,

$$2 \cos \frac{6\pi}{17} + 2 \cos \frac{10\pi}{17} = \text{tang } y \ ,$$

$$2 \cos \frac{6\pi}{17} \times 2 \cos \frac{10\pi}{17} = \text{tang}\left(y - \frac{\pi}{4}\right) \ ,$$

où $4y$ est l'angle aigu dont la tangente est 4 ; il les démontre par la méthode de Gauss ; mais elles résultent immédiatement de l'analyse que j'ai donnée.

La figure que donne M. Richmond est très simple et la construction très rapide.

W. H. Young (de Cambridge et Liverpool, Angleterre).

[1] H.-W. Richmond, *Quart. Journ. of Math.*, Vol. XXVI, p. 206, 1892.