

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 11 (1909)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOUVELLE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE D'ALEMBERT
Autor: Leau, L.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-11854>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 07.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

NOUVELLE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE D'ALEMBERT

Je demande la permission de retenir un moment l'attention des lecteurs de *l'Enseignement mathématique* sur une démonstration élémentaire nouvelle de ce théorème fondamental.

Nous supposerons l'ordre que voici : on constate qu'une équation algébrique de degré n peut avoir n racines et qu'elle n'en saurait avoir davantage, distinctes ou non ; on établit alors, pour de telles équations, les relations qui existent entre les coefficients et les racines et les propriétés des équations dérivées relativement aux racines multiples.

Nous présentons ensuite, sous une forme un peu différente de la forme usuelle, le théorème qui a trait à la continuité des racines. Je me servirai, en l'appliquant aux racines nulles, d'un raisonnement que j'ai récemment donné¹ pour rendre rigoureux l'exposé classique.

THÉORÈME. *Les coefficients de l'équation*

$$(1) \quad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

tendant simultanément et respectivement, suivant une loi donnée quelconque, vers ceux de l'équation

$$(2) \quad \varphi(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0,$$

et α_0 n'étant pas nul, si la 1^{re} équation a pour chaque ensemble des valeurs des coefficients n racines, ces racines ont des limites qui sont racines de la 2^{me} équation.

Il s'agit de prouver l'existence de n nombres $\xi_1 \dots \xi_n$ auxquels on puisse faire correspondre les racines $x_1 \dots x_n$ de l'équation (1) en sorte que l'on ait $|x_i - \xi_i| < \varepsilon$ si $|a_j - \alpha_j| < \varepsilon$.

¹ *Revue de Mathématiques spéciales* : février 1909.

Ce premier point acquis, le second découlera de la continuité du polynôme $f(x)$.

Posons

$$(3) \quad g(y) = f(x + y) = \frac{f^{(n)}(x)}{n!} y^n + \dots + f'(x)y + f(x) = b_0 y^n + \dots + b_{n-1} y + b_n = 0 \quad (b_0 = a_0)$$

Dans la suite, x sera remplacé, dans $f(x + y)$, successivement par diverses racines des équations (1) en même temps que les coefficients a recevront un système de valeurs qui pourra ne pas concorder avec ces racines, en sorte que l'on ait les coefficients d'une équation (1) et un nombre x racine d'une autre. Mais on peut fixer une quantité positive R telle que les modules de toutes les racines des équations (1) soient inférieurs à R . Il en résulte que des polynômes donnés en a_i et x seront limités supérieurement en module : tels les polynômes b .

Nous allons à présent classer, dans une certaine mesure, les racines des équations (1). Etant donnée une quantité positive λ , l'équation (1) a peut-être, pour chaque système des coefficients, des racines telles que $|f'(x)| < \lambda$; leur nombre finit, les a_i tendant vers les α_i , par ne pas descendre au-dessous d'un certain minimum $n_1(\lambda)$; si λ décroît et tend vers zéro, l'entier $n_1(\lambda)$ a lui-même un minimum n_1 (qui peut être nul). Dès lors, si l'on désigne $n - n_1$ par ν_1 , il existe une quantité positive μ_1 et une suite des systèmes a_i tendant vers les α_i , tels que pour chaque équation (1) correspondante, ν_1 racines satisfassent à la condition $|f'(x)| > \mu_1$. Pour cette suite d'équations nous séparons ainsi des n_1 autres un ensemble E_1 de ν_1 racines.

Considérons ensuite les deux inégalités

$$|f'(x)| < \lambda \quad \frac{1}{2} |f''(x)| < \lambda;$$

Le nombre des racines de (1) qui les vérifient, les a_i tendant vers les α_i ne descend pas finalement au-dessous d'un minimum $n_2(\lambda)$ qui est au plus égal à $n_1(\lambda)$ et qui a lui-même,

pour λ infiniment petit, un minimum n_2 au plus égal à n_1 . Posant $n_1 - n_2 = \nu_2$, il existe une quantité positive μ_2 et une suite des systèmes α_i tendant vers les α_i , tels que pour chaque équation (1) correspondante, ν_2 racines satisfassent à la condition $\frac{1}{2} |f''(x)| > \mu_2$ mais aussi, λ étant donné à volonté inférieur à μ_1 et les α_i assez près de leurs limites, à l'inégalité $|f''(x)| < \lambda$. S'il y a quelque équation commune à cette suite et à la précédente, aucune racine du nouvel ensemble E_2 ainsi défini n'appartient à E_1 . La classification se poursuivra ainsi au moyen de suites d'équations (1), la somme des nombres des racines attachées à chaque suite étant manifestement égale à n .

Pour plus de simplicité, aux quantités μ_1, μ_2 etc., nous substituerons la plus petite μ' .

Portons notre attention sur l'ensemble E_p et sur la suite correspondante S des équations (1); appelons

$$(4) \quad f_1(x) = \sum a'_i x^{n-i} = 0,$$

$$(5) \quad f_2(x) = \sum a''_i x^{n-i} = 0,$$

deux équations de la suite S , puis x' une racine de (4) appartenant à E_p ; posons

$$(6) \quad g_2(y) = \frac{f^{(n)}(x')}{n} y^n + \dots + f'_2(x') y + f_2(x') =$$

$$b''_0 y^n + \dots + b''_{n-1} y + b''_n = 0, \quad (b''_0 = a''_0)$$

Nous allons voir que, les a_i et les a''_i étant suffisamment près des α_i , l'équation (6) a p racines très petites et préciser le sens de cette locution.

Soient

$$\frac{f_1^{(h)}(x')}{h!} = b'_{n-h} \quad \text{et} \quad b'_i - b''_i = c_i.$$

On a

$$(7) \quad g_2(y) = (b'_0 - c_0) y^n + (b'_1 - c_1) y^{n-1} + \dots + (b'_{n-1} - c_{n-1}) y +$$

$$b'_n - c_n = 0 \quad (b'_n = 0)$$

Nous mettons ainsi en évidence les quantités b' au sujet desquelles on sait que

$$|b'_{n-p}| > \mu' ; |b'_{n-p+1}| < \lambda, \dots |b'_{n-1}| < \lambda \quad (\lambda < \mu')$$

et les quantités c desquelles on peut affirmer, $|x'|$ étant inférieur à R , que $|c_i| < \lambda$, si seulement

$$|a'_j - \alpha_j| < l\lambda \quad |a''_j - \alpha_j| < l\lambda,$$

l étant un facteur fixe dont il est aisé de préciser une valeur.

Dès lors, posant $\mu' - \lambda = \mu$, nous avons

$$|b''_{n-p}| > \mu ; |b''_{n-p+1}| < 2\lambda, \dots, |b''_n| < 2\lambda.$$

D'ailleurs (et pour toute la suite), on peut trouver M assez grand pour que $|b'_i - c_i| < M$ c'est-à-dire

$$|b''_0| < M, \dots, |b''_{n-p-1}| < M.$$

Je vais montrer que l'on peut trouver un nombre positif r fixe et un nombre positif u infiniment petit avec λ tels que le module d'aucune racine de (6) ne soit compris entre u et r .

Ecrivons ainsi l'équation (6)

$$(8) \quad b''_{n-p+1}y^{-1} + \dots + b''_ny^{-p} = -(b''_0y^{n-p} + \dots + b''_{n-p}).$$

Si r est assez petit et si $|y| < r$, le module du second membre est supérieur à un nombre positif d ; λ diminuant, on pourra laisser r et par suite d constants. Le module du premier membre serait inférieur à ce même nombre d si l'on prenait

$$|b''_{n-p+1}y^{-1}| < \frac{d}{p}, \dots, |b''_ny^{-p}| < \frac{d}{p},$$

ou, à plus forte raison, $|y|$ supérieur à la plus grande des quantités

$$\frac{2p}{d}\lambda, \dots, \sqrt[p]{\frac{2p\lambda}{d}}.$$

Soit k le plus grand des nombres $\frac{2p}{d}, \dots, \sqrt[p]{\frac{2p\lambda}{d}}$, on peut supposer λ inférieur à 1 et à $\frac{r}{2k}$; dès lors, choisissant pour u ,

$k\lambda$, nous sommes assurés qu'il n'y aura pas de racines y telles que $u < |y| < r$ (et $u < \frac{r}{2}$).

Il va être aisé de démontrer à présent, en suivant la voie habituelle que, λ étant suffisamment petit, il y a exactement p racines inférieures à u en module.

Le produit des racines est en module $\left| \frac{b''_n}{b''_0} \right|$, c'est-à-dire $\left| \frac{c_n}{a''_0} \right|$, quantité infiniment petite avec λ , puisque $|c_i| < \lambda$ et que $|a_0|$ a une limite positive. Donc, λ étant suffisamment petit, les n racines de (6) ne pourront être toutes supérieures à r ; quelques-unes seront par suite inférieures à u ; il y en aura exactement p . S'il y en avait moins, $p - h$, le quotient $\frac{b''_{n-p+h}}{b''_{n-p}}$ qui est, au signe près, le rapport $\frac{\Sigma_{n-p+h}}{\Sigma_{n-p}}$ (Σ_t étant la somme des produits t à t des racines) serait plus grand en module qu'une quantité fixe puisque d'une part $|y| < 2R$ et d'autre part dans un terme de Σ_{n-p+h} tous les $|y|$ sont supérieurs à r , l'un d'entre eux au moins dans les autres termes inférieurs à u ; or $\left| \frac{b''_{n-p+h}}{b''_{n-p}} \right| < \frac{2\lambda}{\mu}$, de là une contradiction, si λ est assez petit. De même s'il y avait $p + h$ racines de module inférieur à u , le rapport $\frac{b''_{n-p-h}}{b''_{n-p}}$, au signe près égal à $\frac{\Sigma_{n-p-h}}{\Sigma_{n-p}}$, pourrait être supérieur en module à n'importe quel nombre donné, car chaque terme de Σ_{n-p} contient au moins un y tel que $|y| < u$ et $|\Sigma_{n-p-h}|$ est, comme $|\Sigma_{n-p+h}|$ dans l'hypothèse précédente, plus grand qu'un certain nombre positif. D'ailleurs $\frac{b''_{n-p-h}}{b''_{n-p}} < \frac{M}{\mu}$; de là encore une contradiction si λ est assez petit. Comme les diverses inégalités de même sens ainsi imposées à λ , et qu'il serait oiseux d'écrire, sont en nombre limité, nous pouvons les supposer toutes vérifiées.

Alors, envisageons la suite S à partir d'un moment où il

en sera toujours ainsi. J'appelle x'_1 une racine (système E_p) de la 1^{re} équation, x'_2 une des p qui lui sont associées dans la 2^{me}, x'_3 une des p qui lui sont de même associées dans la 3^{me} et ainsi de suite.

Dans ces conditions q et s étant deux entiers quelconques, x'_{q+s} est une des racines associées à x'_q , car

$$|x'_{q+s} - x'_q| \leq |x'_{q+s} - x'_1| + |x'_q - x'_1| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

u étant toujours inférieur, pour la suite S, à $\frac{r}{2}$.

Posant

$$x'_i - x'_{i+1} = y_i y'_i,$$

la série

$$y'_1 + y'_2 + \dots$$

est convergente. Quel que soit η' on peut trouver q tel que pour toute valeur de s

$$|y'_q + y'_{q+1} + \dots + y'_{q+s-1}| < r', \quad \text{ou} \quad |x'_q - x'_{q+s}| < r'.$$

Il suffit de choisir q assez grand pour que, à partir de l'équation de rang q , la quantité u ne dépasse point η' , c'est-à-dire que λ reste inférieur à $\frac{\eta'}{k}$. La suite $x'_1 x'_2 \dots x'_i \dots$ a donc une limite ξ' . Avec un second choix quelconque des racines associées à x'_1 on aurait manifestement la même limite. Sortons à présent de la suite S; si l'on remplace l'équation (4) par l'équation (2) à laquelle ξ' satisfait et l'équation (5) par l'équation (1) dont les coefficients α_i diffèrent des α_i de moins de λ en module, les raisonnements faits plus haut prouvent qu'il y a exactement p racines qui diffèrent de ξ de moins de $\frac{\lambda}{k}$; d'ailleurs les $p - 1$ dérivées de f sont évidemment nulles pour ξ' , la p^{me} ne l'étant point. Ainsi se trouve établi le théorème énoncé, avec la précision habituelle relative au nombre des racines infiniment voisines d'une racine de l'équation limite.

THÉORÈME DE D'ALEMBERT. — *Toute équation algébrique de degré n*

$$(9) \quad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

a n racines distinctes ou non.

Je m'appuierai sur le lemme suivant :

Si $f(x)$ prend la valeur c , et si l'on trace avec un rayon quelconque r un cercle dont le centre a c pour affixe, $f(x)$ prend certainement comme valeur l'affixe d'un point de n importe quel rayon de ce cercle.

Soient

$$f(x_0) = c, \quad x = x_0 + y$$

et

$$(10) \quad f(x_0 + y) = b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + \dots + b_{n-1} y + c. \quad (b_0 = c_0)$$

Supposons généralement

$$b_{n-1} = b_{n-2} = \dots = b_{n-p+1} = 0 \quad b_{n-p} \neq 0.$$

on a

$$f(x_0 + y) = c + y^p [b_{n-p} + y b_{n-p-1} + \dots + y^{n-p} b_0].$$

Si $y = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$, que ρ soit assez petit et que l'on fasse varier θ de 0 à 2π de manière que le point d'abscisse $x_0 + y$ décrive un petit cercle autour du point x_0 , le point $f(x_0 + y)$ tournera autour du point c de manière à effectuer p tours complets en restant dans un cercle de rayon un peu supérieur à $\rho^p |b_{n-p}|$. D'une manière précise, on peut prendre ρ assez petit pour que $|f(x_0 + y) - c| < r$; d'ailleurs l'argument de $y^p [b_{n-p} + \dots + y^{n-p} b_0]$ étant fonction continue de θ (ρ constant), le point $f(x_0 + y)$ rencontre bien chaque rayon au moins une fois.

Le théorème de d'Alembert est alors immédiat. Exact pour les deux premiers degrés, admettons-le jusqu'au degré $n - 1$. Nous allons l'établir pour un polynôme quelconque de degré n , $f(x)$, en observant d'abord que si un polynôme de degré n a une racine, il en a certainement $n - 1$ autres comme on le voit aisément au moyen d'une division.

Pour une valeur quelconque x_0 , $f(x)$ prend la valeur c .

Joignons le point C d'abscisse c à l'origine O. Sur le segment CO à partir de C il y a indéfiniment des points dont les affixes sont pris par $f(x)$. Soit C' le point, d'affixe c' de ce segment, tel que $|c'|$ soit la limite inférieure des modules de ces affixes. On peut former une suite $c_1 c_2 \dots c_p \dots$ de ces quantités ayant c' pour limite. Cela posé, l'équation

$$(11) \quad g(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n - c_p = 0,$$

ayant une racine, en a n . Lorsque p est infiniment grand, ces racines ont des limites qui sont racines de l'équation limite; c' est donc nul, sans quoi l'on pourrait trouver sur C'O des points dont les affixes seraient encore des valeurs de $f(x)$. Ainsi l'équation limite est l'équation (9). Le théorème est donc vrai pour le degré n : il est général.

Remarque. — J'ai fait allusion plus haut au théorème relatif à la continuité des racines. En se reportant aux démonstrations classiques on voit aisément que la difficulté provient (dans le cas par exemple des coefficients $a_0, a_1 \dots a_{p-1}$ infiniment grands) de ce que l'on ne sait rien sur les racines qui ne sont pas infiniment grandes et que l'on ignore si elles sont limitées supérieurement. Je lève cette difficulté en prouvant qu'il n'existe pas de racines dans une couronne comprise entre un cercle de rayon fixe et un autre de rayon infiniment grand. On peut, mais sans avoir le bénéfice de cette précision, raisonner plus rapidement comme il suit: soit ν une variable positive croissante infiniment grande; pour l'un donné de ses états il arrive un moment (coefficients assez près de leurs limites) à partir duquel le nombre des modules supérieurs à ν ne descend pas au-dessous d'un certain minimum (il y a au moins un tel module); ce minimum est une fonction de ν , $h(\nu)$, non croissante et qui a par conséquent une limite inférieure h . Par définition, c'est ce nombre h qui est le nombre des racines infiniment grandes et qu'il faut déterminer. Il existe certainement un nombre R assez grand, mais fixe, et une suite de systèmes de coefficients tendant vers leurs limites, tels que, pour chaque équation correspondante, h modules seulement soient supérieurs

à R . Donc, un état de ν étant choisi aussi grand que l'on veut, on peut aller assez loin dans la suite particulière d'équations considérées pour que ces équations n'aient pas de racines dont le module soit compris entre R et ν . A ces équations s'applique le raisonnement habituel prouvant que $h = p$.

L. LEAU (Paris).

UNE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DESCARTES

La règle des signes, dite de *Descartes*, attribuée aussi à *Harriot*, peut être énoncée : *Le nombre p des racines positives, non nulles, d'un polynôme entier en x , à coefficients réels, est au plus égal au nombre ν des variations de signe que présente la suite des coefficients; la différence $\nu - p$ est toujours un nombre pair.*

Voici une démonstration basée sur les propriétés qui résultent de la continuité de la fonction entière.

Nous démontrons tout d'abord la seconde partie, $\nu - p$ est un nombre pair.

Il existe un nombre A tel que, pour tous les x supérieurs à A , le polynôme a le signe de son premier coefficient, et un nombre positif ε tel que, pour tous les x positifs, inférieurs à ε , le polynôme a le signe du dernier coefficient. Les racines positives du polynôme sont comprises entre ε et A . En examinant les signes du polynôme pour $x = \varepsilon$ et $x = A$, on obtient la proposition suivante : Le nombre p des racines positives d'un polynôme entier en x à coefficients réels est *pair* ou *impair*, suivant que les coefficients extrêmes sont de *même* signe ou de signes *différents*.

Dans le premier cas, lorsque les coefficients extrêmes ont le même signe, le nombre ν des variations de signe est pair, dans le second il est impair. Les deux nombres ν et p étant