

UNE LEÇON SUR LES PROGRESSIONS ET LEURS APPLICATIONS

Autor(en): **Bryan, G.-H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1909)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-11845>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

UNE LEÇON SUR LES PROGRESSIONS ET LEURS APPLICATIONS

Durant ces dernières années, les progressions ont quelque peu passé de mode dans les cours élémentaires de mathématiques en Angleterre. Je pense qu'on pourrait les enseigner d'une façon très utile et très instructive en adoptant une méthode analogue à celle dont nous allons indiquer les principaux points.

I. — PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES.

1. On donne deux segments de droites (dessinés sur du papier) représentant le premier terme et la raison d'une progression arithmétique. Placer sur une droite un certain nombre de points équidistants et élever par ces points des ordonnées représentant les termes successifs de la progression.

2. *Propriété* : Prouver que les extrémités des ordonnées sont situées sur une ligne droite.

Application aux problèmes suivants :

3. Construire la progression dont les deux premiers termes a et b sont représentés par deux segments donnés. En prenant le cas où $a > b$, déterminer d'après le diagramme le nombre de termes positifs de la progression.

4. Insérer un nombre déterminé de moyens arithmétiques entre les deux longueurs données a et b .

5. Trouver *la somme des termes de la progression*. A cet effet, on représentera de nouveau la progression graphiquement comme auparavant, et soit a le premier terme, l le dernier, n le nombre de termes. Tourner le diagramme de façon

à placer la dernière ordonnée au sommet de la première, l'avant-dernière au sommet de la seconde, etc., et la première au sommet de la dernière. On obtient alors sur la figure n ordonnées respectivement égales à $a + l$. Par conséquent, le double de la somme de la progression est $n(a + l)$, et la somme $n \frac{1}{2} (a + l)$.

Remarquer que $\frac{1}{2} (a + l)$ est l'ordonnée moyenne; elle est égale à l'ordonnée du milieu lorsque le nombre des ordonnées est impair. C'est aussi la moyenne de deux ordonnées quelconques équidistantes des ordonnées extrêmes.

6. Obtenir la somme des n premiers termes de la série $a, a + b, a + 2b, \dots$ sous la forme $na + \frac{1}{2} n(n - 1)b$, en remarquant que na représente la somme des parties a , et que $\frac{1}{2} n(n - 1)b$ doit représenter la somme des portions $b, 2b, \dots, (n - 1)b$.

II. — PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES.

1. Dessiner une série d'ordonnées équidistantes représentant les termes d'une progression géométrique dont le premier terme a a une longueur donnée et dont la raison r est un nombre donné.

On pourra appeler la courbe sur laquelle les extrémités des ordonnées sont situées une « courbe de progression géométrique ». C'est en réalité une courbe logarithmique.

2. *Construction*: Soient M_1, M_2, M_3, \dots les points équidistants choisis comme pieds des ordonnées et M_1P_1 la première ordonnée.

Prenons sur M_1M_2 un point extérieur T_1 tel que $T_1M_2 = r \cdot T_1M_1$, et portons les longueurs $T_1T_2 = T_2T_3 = \dots$ respectivement égales aux segments M_1M_2, M_2M_3, \dots et menons T_1P_1 qui rencontre l'ordonnée passant par M_2 en P_2 ; puis de même joignons T_2P_2 qui rencontrera l'ordonnée passant par M_3 en P_3 , et ainsi de suite. Montrer que M_1P_1, M_2P_2, \dots représentent alors les termes de la progression.

3. Comme application de cette méthode, construire la progression dont le premier et le second termes sont deux longueurs données a et b , en supposant successivement $a > b$ et $a < b$.

4. Trouver par construction le nombre de termes d'une progression donnée (par ex. la progression 10, 9, ...) supérieurs à une quantité donnée (par ex. 3).

5. Trouver *la somme des termes de la progression*. On pourrait le faire au moyen d'un diagramme dans lequel les termes seraient représentés par des ordonnées, mais la démonstration est un peu plus simple lorsque les termes sont représentés par des longueurs $OP_1, OP_2, OP_3, \dots, OP_n$ mesurées à partir d'un point fixe O sur un axe horizontal. Nous avons immédiatement, si $r > 1$

$$P_1P_2 = (r - 1)OP_1, P_2P_3 = (r - 1)OP_2, \text{ etc.}$$

En ajoutant le terme supplémentaire OP_{n+1} on a finalement $P_nP_{n+1} = (r - 1)OP_n$.

Par conséquent, la longueur totale P_1P_{n+1} est égale à $(r - 1)$ fois la somme de la progression.

Par suite, la somme des n premiers termes de la progression présente la forme

$$\frac{OP_{n+1} - OP_1}{r - 1}, \text{ c.-à-d. } \frac{(n + 1)^{\text{me}} \text{ terme} - 1^{\text{er}} \text{ terme}}{r - 1}.$$

Si nous considérons maintenant le cas d'une progression décroissante, la démonstration est absolument la même, à cette différence près que les points P_1, P_2, P_3, \dots s'approchent continuellement de O sans jamais le dépasser. Par suite, la somme des segments $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, \dots$ tend vers la limite P_1O à mesure que le nombre des termes augmente. Les segments étant respectivement égaux à $(1 - r)$ fois les longueurs correspondantes OP_1, OP_2, \dots , on en déduit que OP_1 est égal à $(1 - r)$ fois la somme de la progression à l'infini. Donc la somme à l'infini est égale à

$$\frac{OP_1}{1 - r}$$

6. Dans le diagramme représentant une « courbe de progression géométrique » on pourra insérer un nombre quelconque de moyens géométriques. Si la courbe est simplement dessinée par l'élève à main levée, les moyens mesurés sur le diagramme ne seront naturellement qu'approximatifs. Mais, pour rendre la construction exacte, une simple règle ayant la forme d'une telle courbe suffira et permettra de résoudre des problèmes de ce genre.

III. — APPLICATION DES PROGRESSIONS A DES FORMULES DE MESURES.

Il ne semble pas que le fait suivant soit généralement connu, à savoir que la formule donnant la somme d'une série géométrique puisse être utilisée pour le calcul des aires, des volumes de révolution, des coordonnées de centres de gravité, de centres de pression ou des moments d'inertie dépendant d'intégrales de puissances de la variable. Ainsi le volume et le centre de gravité d'une pyramide, d'un cône ou d'un parabolôïde, ou bien les coordonnées du centre de pression d'un triangle ou d'une parabole, sont des exemples pouvant être traités par cette méthode. Prenons un exemple suffisamment difficile pour pouvoir servir de type; le maître n'aura qu'à s'y référer pour les applications analogues.

Exemple : Trouver le volume engendré par la révolution de la courbe $a y = x^2$ autour de l'axe des x , entre $x = 0$ et $x = h$.

Divisons le volume en tranches par des plans dont les distances à l'origine forment une progression géométrique de raison r , un peu inférieure à 1.

Les distances de ces plans à l'origine, en y comprenant la base elle-même, seront

$$h, \quad rh, \quad r^2h, \quad r^3h, \dots$$

Les rayons des sections correspondantes sont

$$\frac{h^2}{a}, \quad \frac{r^2 h^2}{a}, \quad \frac{r^4 h^2}{a}, \quad \frac{r^6 h^2}{a}, \dots$$

Les épaisseurs des tranches successives sont

$$(1 - r)h, \quad (r - r^2)h, \quad (r^2 - r^3)h, \dots$$

Les surfaces de leurs plus grandes faces sont

$$\frac{\pi h^4}{a^2}, \quad \frac{\pi r^4 h^4}{a^2}, \quad \frac{\pi r^8 h^4}{a^2}, \dots$$

Les surfaces de leurs plus petites faces sont

$$\frac{\pi r^4 h^4}{a^2}, \quad \frac{\pi r^8 h^4}{a^2}, \quad \frac{\pi r^{12} h^4}{a^2}, \dots$$

Le volume du solide est compris entre la somme des produits des plus grandes faces des éléments par leurs épaisseurs et celle des produits des plus petites faces des éléments par leurs épaisseurs, c'est-à-dire entre

$$\frac{\pi h^5}{a^2} (1 - r) (1 + r^5 + r^{10} + \dots),$$

et

$$\frac{\pi h^5}{a^2} (1 - r) (r^4 + r^9 + r^{14} + \dots),$$

ou entre

$$\frac{\pi h^5 (1 - r)}{a^2 (1 - r^5)} \quad \text{et} \quad \frac{\pi h^5 r^4 (1 - r)}{a^2 (1 - r^5)},$$

ou encore entre

$$\frac{\pi h^5}{a^2 (1 + r + r^2 + r^3 + r^4)} \quad \text{et} \quad \frac{\pi h^5 r^4}{a^2 (1 + r + r^2 + r^3 + r^4)}$$

Pour $r = 1$ les deux expressions donnent la même valeur limite $\pi h^5 : 5a^2$ pour le volume demandé. Le volume est donc le $1/5$ du produit de la base par la hauteur.

Le trait essentiel de cette méthode réside dans le fait qu'au lieu d'avoir des sections équidistantes, les distances de ces sections à l'origine forment une progression géométrique dont la raison est un peu inférieure à l'unité. Par suite, la sommation est effectuée au moyen de la formule des progressions géométriques, tandis que, dans le cas de sections équidistantes, nous serions obligés d'avoir recours à des formules séparées concernant les sommes des carrés, cubes

et autres puissances des nombres naturels. Le fait que nous avons le droit de choisir $r < 1$ et de passer ensuite au cas limite où $r = 1$ se justifie par des diagrammes bien construits; on verra que les quantités dont on doit faire la somme restent finies dans tous les cas où cette méthode est applicable.

Comme *autre exemple* de l'usage des progressions, on pourra appliquer avantageusement les propriétés de la « courbe de progression géométrique », qui est identique à la courbe logarithmique, à la démonstration des formules de différentiation et d'intégration concernant les fonctions exponentielles et logarithmiques. La figure, examinée au point de vue géométrique, nous fournit une démonstration rapide du fait que la limite dont dépendent ces différentiations et intégrations, c'est-à-dire la limite de $\frac{(a^h - 1)}{h}$ lorsque $h = 0$, est finie et possède les propriétés du logarithme de a , et que la base de ce système de logarithmes est un nombre fini e plus grand que l'unité pouvant être estimé approximativement en le mesurant sur le diagramme.

G.-H. BRYAN (Bangor, N. Wales).

Note. — Le nom de « progression » est donné dans les anciens manuels anglais aux séries arithmétiques et géométriques et est utilisé dans le sens que nous lui avons attribué ci-dessus. La seule autre série à laquelle on donne généralement ce nom est la progression harmonique. Comme cette progression est habituellement étudiée en même temps que ses applications géométriques, nous n'en avons pas parlé ici.

(Traduction de J.-P. DUMUR, Genève.)
