II. — Progressions géométriques.

à placer la dernière ordonnée au sommet de la première, l'avant-dernière au sommet de la seconde, etc., et la première au sommet de la dernière. On obtient alors sur la figure n ordonnées respectivement égales à $a + l$. Par conséquent, le double de la somme de la progression est $n(a + l)$, et la somme $n \frac{1}{2}(a + l)$.

Remarquer que $\frac{1}{2}(a + l)$ est l'ordonnée moyenne ; elle est égale à l'ordonnée du milieu lorsque le nombre des ordonnées est impair. C'est aussi la moyenne de deux ordonnées quelconques équidistantes des ordonnées extrêmes.

6. Obtenir la somme des n premiers termes de la série $a, a + b, a + 2b, \ldots.$ sous la forme $na + \frac{1}{2} n(n - 1)b$, en remarquant que na représente la somme des parties a, et que $\frac{1}{2} n(n - 1)b$ doit représenter la somme des portions $b, 2b, \ldots.$ $(n - 1)b$.

II. — Progressions géométriques.

1. Dessiner une série d'ordonnées équidistantes représentant les termes d'une progression géométrique dont le premier terme a a une longueur donnée et dont la raison r est un nombre donné.

On pourra appeler la courbe sur laquelle les extrémités des ordonnées sont situées une « courbe de progression géométrique ». C'est en réalité une courbe logarithmique.

2. *Construction :* Soient $M_1, M_2, M_3, \ldots.$ les points équidistants choisis comme pieds des ordonnées et M_1P_1 la première ordonnée.

Prenons sur M_1M_2 un point extérieur T_1 tel que $T_1M_2 = r . T_1M_1$, et portons les longueurs $T_1T_2 = T_2T_3 = \ldots.$ respectivement égales aux segments M_1M_2, $M_2M_3 \ldots.$ et menons T_1P_1 qui rencontre l'ordonnée passant par M_2 en P_2 ; puis de même joignons T_2P_2 qui rencontrera l'ordonnée passant par M_3 en P_3, et ainsi de suite. Montrer que $M_1P_1, M_2P_2, \ldots.$ représentent alors les termes de la progression.

3. Comme application de cette méthode, construire la progression dont le premier et le second termes sont deux longueurs données a et b, en supposant successivement $a > b$ et $a < b$.

4. Trouver par construction le nombre de termes d'une progression donnée (par ex. la progression 10, 9, ...) supérieurs à une quantité donnée (par ex. 3).

5. Trouver *la somme des termes de la progression.* On pourrait le faire au moyen d'un diagramme dans lequel les termes seraient représentés par des ordonnées, mais la démonstration est un peu plus simple lorsque les termes sont représentés par des longueurs OP_1, OP_2, OP_3,..... OP_n mesurées à partir d'un point fixe O sur un axe horizontal. Nous avons immédiatement, si $r > 1$

$$P_1P_2 = (r-1)OP_1, \quad P_2P_3 = (r-1)OP_2, \text{ etc.}$$

En ajoutant le terme supplémentaire OP_{n+1} on a finalement $P_nP_{n+1} = (r-1)OP_n$.

Par conséquent, la longueur totale P_1P_{n+1} est égale à $(r-1)$ fois la somme de la progression.

Par suite, la somme des n premiers termes de la progression présente la forme

$$\frac{OP_{n+1} - OP_1}{r-1}, \quad \text{c.-à-d.} \quad \frac{(n+1)^{\text{me}}\text{ terme} - 1^{\text{er}}\text{ terme}}{r-1}.$$

Si nous considérons maintenant le cas d'une progression décroissante, la démonstration est absolument la même, à cette différence près que les points P_1, P_2, P_3, ... s'approchent continuellement de O sans jamais le dépasser. Par suite, la somme des segments P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, ... tend vers la limite P_1O à mesure que le nombre des termes augmente. Les segments étant respectivement égaux à $(1-r)$ fois les longueurs correspondantes OP_1, OP_2, ..., on en déduit que OP_1 est égal à $(1-r)$ fois la somme de la progression à l'infini. Donc la somme à l'infini est égale à

$$\frac{OP_1}{1-r}$$

6. Dans le diagramme représentant une « courbe de progression géométrique » on pourra insérer un nombre quelconque de moyens géométriques. Si la courbe est simplement dessinée par l'élève à main levée, les moyens mesurés sur le diagramme ne seront naturellement qu'approximatifs. Mais, pour rendre la construction exacte, une simple règle ayant la forme d'une telle courbe suffira et permettra de résoudre des problèmes de ce genre.

III. — Application des progressions a des formules de mesures.

Il ne semble pas que le fait suivant soit généralement connu, à savoir que la formule donnant la somme d'une série géométrique puisse être utilisée pour le calcul des aires, des volumes de révolution, des coordonnées de centres de gravité, de centres de pression ou des moments d'inertie dépendant d'intégrales de puissances de la variable. Ainsi le volume et le centre de gravité d'une pyramide, d'un cône ou d'un paraboloïde, ou bien les coordonnées du centre de pression d'un triangle ou d'une parabole, sont des exemples pouvant être traités par cette méthode. Prenons un exemple suffisamment difficile pour pouvoir servir de type ; le maître n'aura qu'à s'y référer pour les applications analogues.

Exemple : Trouver le volume engendré par la révolution de la courbe $a\ y = x^2$ autour de l'axe des x, entre $x = o$ et $x = h$.

Divisons le volume en tranches par des plans dont les distances à l'origine forment une progression géométrique de raison r, un peu inférieure à 1.

Les distances de ces plans à l'origine, en y comprenant la base elle-même, seront

$$h, \quad rh, \quad r^2h, \quad r^3h, \ldots\ldots$$

Les rayons des sections correspondantes sont

$$\frac{h^2}{a} \quad \frac{r^2h^2}{a} \quad \frac{r^4h^2}{a} \quad \frac{r^6h^2}{a} \ldots\ldots$$