

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 13 (1911)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES FONCTIONS SYNECTIQUES
Autor: Turrière, É.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-13531>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 04.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR LES FONCTIONS SYNECTIQUES

L'objet de cette Note est de mettre en évidence une interprétation géométrique, ressortissant à la Géométrie réglée, des relations qui caractérisent les fonctions synectiques.

Étant donné un système d'axes rectangulaires $O(x, y, z)$, de chaque point m de coordonnées x, y , dans le plan Oxy , est supposée partir une droite d de cosinus directeurs p_1, p_2, p_3 :

$$p_1 = P \cos \theta + Q \sin \theta ,$$

$$p_2 = P \sin \theta - Q \cos \theta ,$$

$$p_3 = \sqrt{1 - P^2 - Q^2} ;$$

P et Q , dans ces formules, sont deux fonctions, quelconques pour l'instant, des variables x et y ; quant à θ , c'est un paramètre constant et quelconque.

Les droites d ainsi définies constituent, pour des fonctions P et Q données et pour chaque valeur du paramètre θ , une congruence de droites; lorsque θ varie, la congruence précédente se déforme en engendrant un complexe de droites; ce complexe peut être défini indépendamment de la considération des congruences : il est constitué par les génératrices de cônes de révolution de sommets situés dans une région du plan Oxy , d'axes parallèles à Oz , et dont les demi-angles V aux sommets sont déterminés par la formule

$$\sin^2 V = P^2 + Q^2 .$$

Le paramètre θ ayant une valeur fixée, la congruence qui lui correspond n'est pas une congruence de normales, dans le cas général où les fonctions P et Q sont quelconques. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'expression

$$p_1 dx + p_2 dy$$

soit une différentielle exacte, ce qui entraîne la condition

$$\frac{\partial p_1}{\partial y} - \frac{\partial p_2}{\partial x} = 0 ,$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \cos \theta + \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \sin \theta = 0 .$$

Cette dernière relation est identiquement vérifiée quel que soit θ , lorsque P et Q sont liées par les conditions simultanées.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = - \frac{\partial Q}{\partial x} ,$$

et dans ce cas seulement. Il en résulte donc que *la condition nécessaire et suffisante pour que la congruence des droites d soit une congruence de normales, pour toutes valeurs du paramètre θ , est que P et Q soient deux fonctions synectiques.* En d'autres termes, $P + iQ$ doit être fonction de la variable complexe $z = x + iy$.

Telle est la propriété qui constitue une interprétation géométrique des relations qui lient les fonctions synectiques. Je terminerai cette Note par une propriété du complexe des droites d .

Soit

$$P + iQ = f(z) ;$$

le complexe peut être envisagé comme défini par les génératrices du cône de révolution, de sommets situés dans Oxy , d'axes parallèles à Oz , de demi-angles aux sommets déterminés par la formule

$$\sin V = |f(z)| ;$$

le point m est assujéti à l'unique condition d'appartenir à la région du plan Oxy pour laquelle le module de la fonction $f(z)$ est inférieur à l'unité. D'après ce qui précède, le complexe est engendré par une congruence de normales variable qui dépend d'un paramètre ; d'un théorème de M. DARBOUX, il résulte donc que toutes les congruences de

normales qui appartiennent à ce complexe, sont déterminables immédiatement, sans introduction de quadratures autres que celles qui pourraient figurer dans l'équation des surfaces trajectoires orthogonales des droites de la congruence associée au paramètre θ .

Quant à ces dernières surfaces, il est aisé de les déterminer. Soit M le point d'incidence de la normale d sur une des surfaces trajectoires, et soient X, Y, Z les coordonnées de ce point M ; en introduisant la distance $\overline{mM} = \lambda$ inconnue et à déterminer, on a

$$X = x + \lambda p_1, \quad Y = y + \lambda p_2, \quad Z = \lambda p_3;$$

en utilisant la relation

$$p_1 dX + p_2 dY + p_3 dZ = 0,$$

il vient :

$$-d\lambda = (Pdx - Qdy) \cos \theta + (Qdx + Pdy) \sin \theta;$$

de cette relation résulte l'expression de λ

$$2\lambda = - \left\{ e^{-i\theta} \int f(z) dz + e^{i\theta} \int f(z_0) dz_0 \right\} + \text{const},$$

dans laquelle z_0 désigne la variable complexe conjuguée de z ; la distance λ est donc définie par la formule

$$\lambda = - \text{partie réelle de } [e^{-i\theta} \varphi(z)] + \text{const},$$

en introduisant la nouvelle fonction de variable complexe

$$\varphi(z) = e^{-i\theta} \int f(z) dz,$$

afin de faire disparaître tout signe d'intégration dans les formules finales.

É. TURRIÈRE (Alençon).