Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 13 (1911)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES FONCTIONS SYNECTIQUES
Autor: Turrière, É.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13531

SUR LES FONCTIONS SYNECTIQUES

L'objet de cette Note est de mettre en évidence une interprétation géométrique, ressortissant à la Géométrie réglée, des relations qui caractérisent les fonctions synectiques.

Étant donné un système d'axes rectangulaires $O(x, y, z)$, de chaque point m de coordonnées x, y, dans le plan Oxy, est supposée partir une droite d de cosinus directeurs p_1, p_2, p_3 :

$$p_1 = \mathrm{P} \cos \theta + \mathrm{Q} \sin \theta \; ,$$
$$p_2 = \mathrm{P} \sin \theta - \mathrm{Q} \cos \theta \; ,$$
$$p_3 = \sqrt{1 - \mathrm{P}^2 - \mathrm{Q}^2} \; ;$$

P et Q, dans ces formules, sont deux fonctions, quelconques pour l'instant, des variables x et y; quant à θ, c'est un paramètre constant et quelconque.

Les droites d ainsi définies constituent, pour des fonctions P et Q données et pour chaque valeur du paramètre θ, une congruence de droites; lorsque θ varie, la congruence précédente se déforme en engendrant un complexe de droites; ce complexe peut être défini indépendamment de la considération des congruences : il est constitué par les génératrices de cônes de révolution de sommets situés dans une région du plan Oxy, d'axes parallèles à Oz, et dont les demi-angles V aux sommets sont déterminés par la formule

$$\sin^2 \mathrm{V} = \mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2 \; .$$

Le paramètre θ ayant une valeur fixée, la congruence qui lui correspond n'est pas une congruence de normales, dans le cas général où les fonctions P et Q sont quelconques. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'expression

$$p_1 dx + p_2 dy$$

soit une différentielle exacte, ce qui entraîne la condition

$$\frac{\partial p_1}{\partial y} - \frac{\partial p_2}{\partial x} = 0 ,$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \cos\theta + \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) \sin\theta = 0 .$$

Cette dernière relation est identiquement vérifiée quel que soit θ, lorsque P et Q sont liées par les conditions simultanées.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} ,$$

et dans ce cas seulement. Il en résulte donc que *la condition nécessaire et suffisante pour que la congruence des droites* d *soit une congruence de normales, pour toutes valeurs du paramètre θ, est que* P *et* Q *soient deux fonctions synectiques.* En d'autres termes, $P + iQ$ doit être fonction de la variable complexe $z = x + iy$.

Telle est la propriété qui constitue une interprétation géométrique des relations qui lient les fonctions synectiques. Je terminerai cette Note par une propriété du complexe des droites d.

Soit

$$P + iQ = f(z) ;$$

le complexe peut être envisagé comme défini par les génératrices du cône de révolution, de sommets situés dans Oxy, d'axes parallèles à Oz, de demi-angles aux sommets déterminés par la formule

$$\sin V = | f(z) | ;$$

le point m est assujetti à l'unique condition d'appartenir à la région du plan Oxy pour laquelle le module de la fonction $f(z)$ est inférieur à l'unité. D'après ce qui précède, le complexe est engendré par une congruence de normales variable qui dépend d'un paramètre ; d'un théorème de M. Darboux, il résulte donc que toutes les congruences de normales qui appartiennent à ce complexe, sont déterminables immédiatement, sans introduction de quadratures autres que celles qui pourraient figurer dans l'équation des surfaces trajectoires orthogonales des droites de la congruence associée au paramètre θ.

Quant à ces dernières surfaces, il est aisé de les déterminer. Soit M le point d'incidence de la normale d sur une des surfaces trajectoires, et soient X, Y, Z les coordonnées de ce point M; en introduisant la distance $\overline{mM} = \lambda$ inconnue et à déterminer, on a

$$X = x + \lambda p_1 , \quad Y = y + \lambda p_2 , \quad Z = \lambda p_3 ;$$

en utilisant la relation

$$p_1 dX + p_2 dY + p_3 dZ = 0 ,$$

il vient :

$$- d\lambda = (P dx - Q dy) \cos\theta + (Q dx + P dy) \sin\theta ;$$

de cette relation résulte l'expression de λ

$$2\lambda = - \left\{ e^{-i\theta} \int f(z)\, dz + e^{i\theta} \int f(z_0)\, dz_0 \right\} + \text{const} ,$$

dans laquelle z_0 désigne la variable complexe conjuguée de z; la distance λ est donc définie par la formule

$$\lambda = - \text{partie réelle de } [e^{-i\theta} \varphi(z)] + \text{const} ,$$

en introduisant la nouvelle fonction de variable complexe

$$\varphi(z) = e^{-i\theta} \int f(z)\, dz ,$$

afin de faire disparaître tout signe d'intégration dans les formules finales.

É. Turrière (Alençon).