Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 13 (1911)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DÉTERMINATION DU CENTRE DE GRAVITÉ D'UN SEGMENT PARABOLIQUE PAR UNE MÉTHODE ÉLÉMENTAIRE

Autor: Scherrer, E.-R.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13526

DÉTERMINATION DU CENTRE DE GRAVITÉ D'UN SEGMENT PARABOLIQUE PAR UNE MÉTHODE ÉLÉMENTAIRE[1]

En considérant la parabole comme le lieu géométrique des points également distants d'un point fixe, le foyer, et d'une droite fixe, la directrice, il est facile de montrer que la courbe est déterminée par deux quelconques de ses tangentes et leurs points de contact.

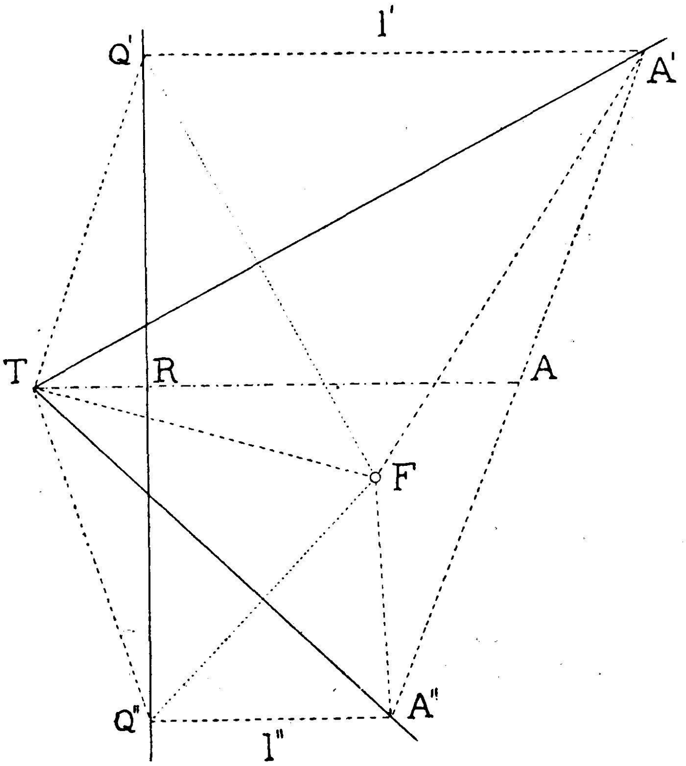

Fig. 1.

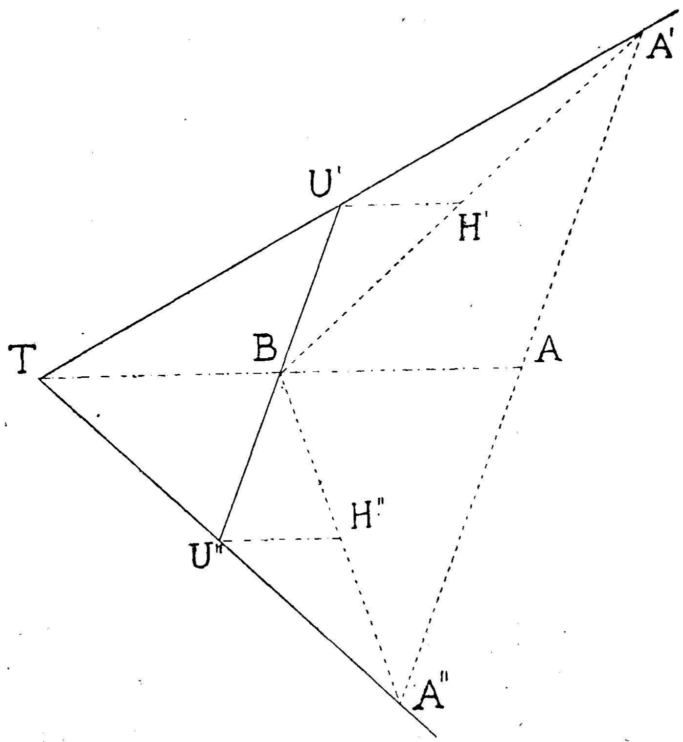

Fig. 2.

Soient TA′ et TA″ (fig. 1), deux droites quelconques, et soit A le point milieu de A′A″. Menons par A′ la parallèle l'

[1] Communication faite à la 12[me] réunion de la Société suisse des professeurs de mathématiques, le 9 octobre 1910, à Baden.

à TA et par A″ la parallèle l'' à la même direction ; construisons de plus A′F symétrique de l' par rapport à TA′, et de même A″F symétrique de l'' par rapport à TA″ ; ces deux droites se coupent en F.

La perpendiculaire abaissée de F sur TA′ coupe l' en Q′ symétrique de F par rapport à TA′ de même Q″, intersection de l'' avec la perpendiculaire abaissée de F sur TA″, est le symétrique de F par rapport à TA″.

Donc

$$TQ' = TF = TQ'' .$$

Dans le trapèze A′Q′Q″A″, la droite TA est une médiane ; elle coupe donc Q′Q″ en son milieu R et se trouve être par suite perpendiculaire à la base Q′Q″ du triangle isocèle Q′Q″T. Il en résulte que l' et l'' sont aussi perpendiculaires à Q′Q″.

Du reste, comme $A'Q' = A'F$ et $A''Q'' = A''F$, nous pouvons en conclure que F est le foyer et Q′Q″ la directrice d'une parabole, dont TA′ et TA″ sont des tangentes ayant A′ et A″ pour points de contact. La droite TA, joignant le point d'intersection des deux tangentes avec le point milieu de la corde des contacts, est parallèle à l'axe de la parabole.

Menons par le milieu U′ (fig. 2) de TA′ une deuxième tangente, son point de contact définit avec A′ une corde dont le milieu H′ se trouve sur la parallèle à TA menée par U′. Ce point de contact se trouve donc sur TA.

Pour la même raison la tangente à la parabole issue du milieu U″ de TA″ a aussi son point de contact sur la droite TA. Or sur cette droite il n'existe qu'un seul point de la parabole à distance finie ; par suite les tangentes issues de U′ et U″, dont il vient d'être question, sont confondues. U′U″ est une tangente dont l'intersection B avec TA est le point de contact.

En résumé : *Dans toute parabole, le segment rectiligne joignant l'intersection de deux tangentes au point milieu de la corde des contacts, est parallèle à l'axe. Il est recoupé en son milieu par la courbe, suivant une direction parallèle à la dite corde.*

Cette propriété, qui sert de base à la détermination de la surface du segment parabolique, va également nous servir à en déterminer le centre de gravité. Soit A′A″B (fig. 3) un triangle inscrit dans la parabole, dont la médiane BA est parallèle à l'axe. Soient encore U′ et U″ les points d'intersection des tangentes en A′ et A″ avec la tangente en B.

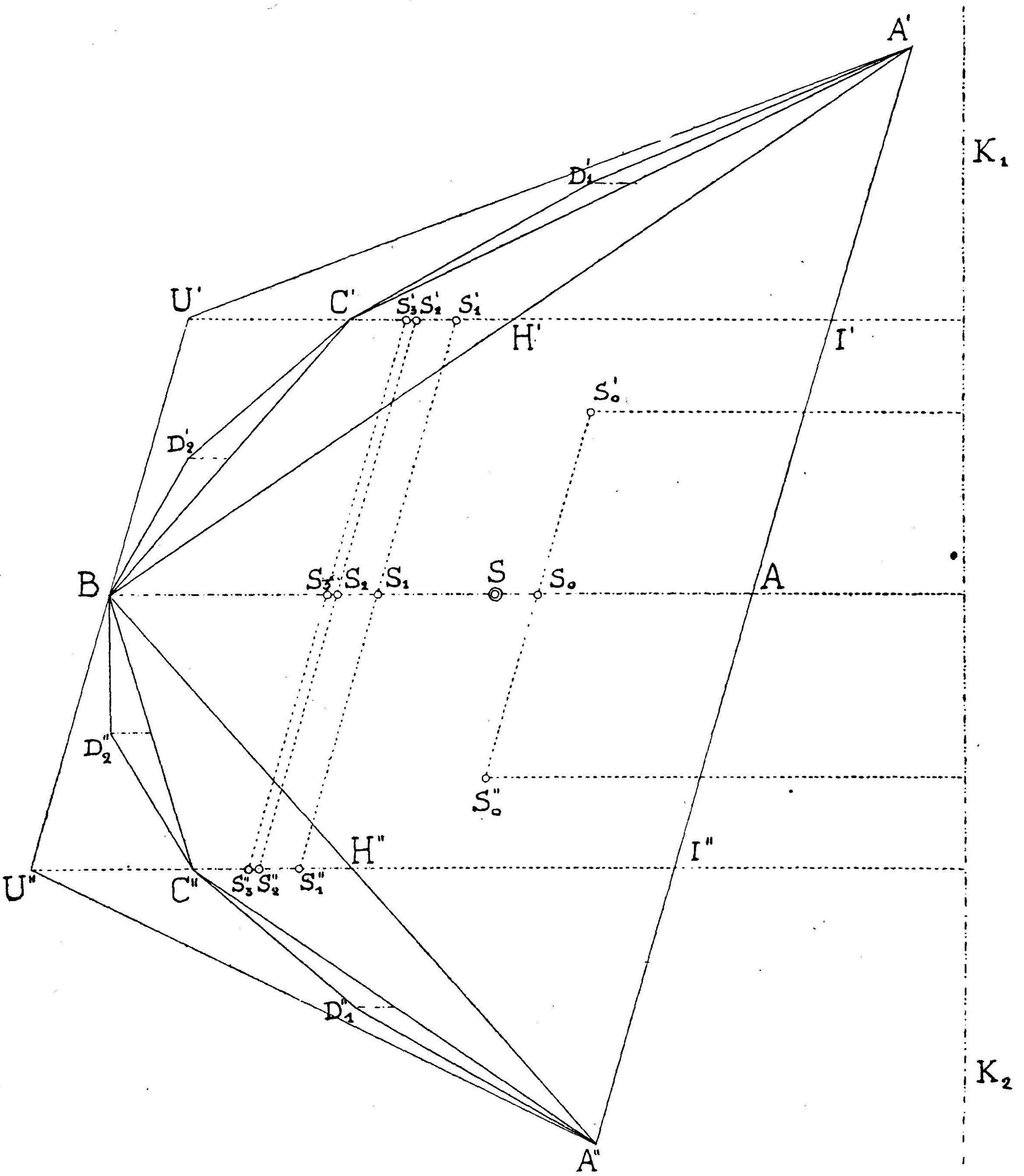

Fig. 3.

Les parallèles à l'axe menées par U′ et U″ rencontrent les cordes A′B et A″B en leur milieu H′ et H″. Les segments U′H′ et U″H″ sont du reste égaux chacun à la moitié de AB et sont recoupés par la parabole en leur milieu C′ et C″. Les médianes $C'H'$ et $C''H''$ des triangles $A'BC'$ et $A''BC''$ sont donc parallèles à l'axe, et égales chacune au quart de AB. Le triangle $A'BC'$ est donc égal à la moitié de $A'BU'$, et au quart de ABA', et les deux triangles $A'BC'$ et $A''BC''$, pris ensemble ont une aire égale au quart de celle du triangle (de départ) $A'A''B$.

Dans la suite, pour simplifier l'exposé, chaque fois qu'il s'agira d'un triangle inscrit dans la parabole et ayant une médiane parallèle à l'axe, nous appellerons *base*, le côté que cette médiane divise en deux parties égales et simplement *côtés*, les deux autres; par *médiane*, nous sous-entendrons qu'il s'agit exclusivement de celle qui est parallèle à l'axe de la parabole.

Dans le triangle $A'BA''$ que nous désignerons désormais par *triangle de départ*, $A'A'$ est la base, et $A'B'$, $A''B$ sont les côtés. Ceux-ci servent de base à deux nouveaux triangles inscrits, $A'BC'$ et $A''BC''$, formant une *première série*. Les côtés de ces deux triangles serviront à leur tour de bases pour quatre triangles $A'C'D'_1$, $C'BD'_2$, $BC''D''_2$ $C''A''D''_1$ formant une *deuxième série*. Leurs médianes sont égales au quart des médianes des triangles de la première série, et la somme de leurs aires, que nous appellerons *aire de la deuxième série*, équivaut au quart de l'aire de la première série.

En prenant successivement les côtés d'une série, comme bases de la série suivante, on pourra former des séries à l'infini; les médianes d'une série sont égales entre elles et valent le quart des médianes de la série précédente; les triangles d'une même série ont la même aire, et l'aire d'une série est égale au quart de l'aire de la série précédente.

Le centre de gravité S_0 du triangle de départ $A'BA''$ se trouve sur AB au tiers de ce segment à partir de A. Le centre de gravité S'_1 du triangle $A'BC'$ est situé sur $H'C'$ à la distance $\frac{\overline{H'C'}}{3}$ ou $\frac{\overline{AB}}{12}$ de H'; or $H'I'$ égale $\frac{6}{12}\overline{AB}$, donc $I'S'_1$ égale $\frac{7}{12}\overline{AB}$.

Il en est de même pour la distance $I''S''_1$, où S''_1 désigne le centre de gravité du triangle $A''BC''$. Le segment $S'_1S''_1$ est donc parallèle à la base $A'A''$ du triangle de départ, dont la médiane le coupe en S_1, centre de gravité de la première série. La distance AS_1 est du reste égale au $\frac{7}{12}$ de AB, donc

$$S_0 S_1 = \frac{7}{12}\overline{AB} - \frac{4}{12}\overline{AB} = \frac{1}{4} AB = H'C' = H''C'' .$$

Le centre de gravité de la première série se trouve donc sur la médiane du triangle de départ, et en arrière du centre de gravité S_0, à une distance égale de la médiane des triangles de cette première série.

Les triangles de la deuxième série situés au-dessus de AB, jouent le rôle d'une première série par rapport à $A'BC'$ considéré comme triangle de base; le centre de gravité S'_2 de ces triangles se trouve par suite sur $H'C'$, à une distance en arrière de S'_1 égale à la longueur de la médiane correspondante, c'est-à-dire $\frac{AB}{4^2}$; de même le centre de gravité S''_2 des autres triangles de la deuxième série se trouve sur $H''C''$ à la même distance en arrière de S''_1. La droite $S'_2S''_2$ est donc parallèle à $S'_1S''_1$ et à $A'A''$, elle est coupée par AB en S_2, centre de gravité de la deuxième série et la distance S_1S_2 est égale à la longueur des médianes des triangles de cette deuxième série, soit $\frac{AB}{4^2}$.

Les triangles de la troisième série situés au-dessus de AB forment à leur tour une deuxième série par rapport à $A'BC'$ pris comme triangle de départ, d'où il résulte que leur centre de gravité S'_3 se trouve sur la médiane $C'H'$, à une distance en arrière de S'_2, égale à la longueur de leur médiane. Le même raisonnement que ci-dessus montre alors que S_3, centre de gravité de la troisième série, est situé sur AB à une distance de S_2 égale à $\frac{AB}{4^3}$; et ainsi de suite.

Les distances successives des centres de gravité des diverses séries forment ainsi une progression géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

Désignons par Δ l'aire du triangle de départ, par b la longueur de sa médiane, par M_0 la valeur du moment de cette aire, pris par rapport au point A comme centre, enfin par M_k, le moment de la $k^{ème}$ série par rapport au même point; on aura :

$$M_0 = \Delta \frac{b}{3}, \qquad M_2 = \frac{\Delta}{4^2}\left(\frac{b}{3} + \frac{b}{4} + \frac{b}{4^2}\right)$$

$$M_1 = \frac{\Delta}{4}\left(\frac{b}{3} + \frac{b}{4}\right), \qquad M_3 = \frac{\Delta}{4^3}\left(\frac{b}{3} + \frac{b}{4} + \frac{b}{4^2} + \frac{b}{4^3}\right)$$

$$M_k = \frac{\Delta}{4^k}\left(\frac{b}{3} + \frac{b}{4} + \dots \frac{b}{4^k}\right)$$

Faisons la somme, membre à membre, de cette série d'égalités, indéfiniment prolongée. La somme des premiers membres tend alors vers l'expression du moment du segment parabolique entier, par rapport à A; appelons cette limite $\Sigma . x$, Σ représentant l'aire du segment et x la distance de son centre de gravité S au point A. La sommation des seconds membres s'obtiendra en effectuant les produits indiqués, puis en groupant les premiers, deuxièmes, troisièmes termes, etc..., de ces produits, de telle sorte qu'on pourra écrire :

$$\Sigma . x = \left(\Delta + \frac{\Delta}{4} + \frac{\Delta}{4^2} + \frac{\Delta}{4^3} + \dots\right)\left(\frac{b}{3} + \frac{b}{16} + \frac{b}{16^2} + \frac{b}{16^3} + \dots\right)$$

La première parenthèse représente l'aire du segment, égale à $\frac{4}{3}\Delta$; la deuxième parenthèse a pour valeur

$$\frac{b}{3} + \frac{\frac{b}{16}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{b}{3} + \frac{b}{15} = \frac{2}{5}b$$

d'où résulte :

$$x = \frac{2}{5}b .$$

Le centre de gravité d'un segment parabolique divise donc la médiane du triangle de départ dans le rapport 2 : 3.

Si le segment parabolique tourne autour d'une droite K_1K_2 perpendiculaire à son axe et ne rencontrant pas sa surface, il engendre un corps de révolution dont le volume s'obtiendra en sommant les volumes partiels v_0, v_1, v_2, v_3, etc..., des anneaux engendrés par la rotation du triangle de départ, et des triangles des séries précédemment envisagées.

Or on sait déduire de la formule du volume d'un cône tronqué, que le volume annulaire engendré par la rotation d'un triangle autour d'un axe normal à l'un de ses côtés et ne rencontrant pas sa surface, est donné par

$$v = 2\pi\Delta \,.\, s$$

Δ désignant l'aire du triangle et s la distance de son centre de gravité à l'axe de rotation.

Soient alors S'_0 et S''_0 les centres de gravité des triangles ABA' et ABA'', s'_0 et s''_0 leurs distances de l'axe de rotation, s_0 celle du point S_0 jusqu'au même axe, s'_k, s''_k et s_k les distances des points S'_k, S''_k et S_k centres de gravité correspondant à la $k^{ième}$ série.

Avec ces notations, il viendra :

$$v_0 = 2\pi\frac{\Delta}{2}s'_0 + 2\pi\frac{\Delta}{2}s''_0 = 2\pi\Delta\frac{s'_0 + s''_0}{2} = 2\pi\Delta s_0$$

$$v_1 = 2\pi\frac{\Delta}{4\,.\,2}s'_1 + 2\pi\frac{\Delta}{4\,.\,2}s''_1 = 2\pi\frac{\Delta}{4}\frac{s'_1 + s''_1}{2} = 2\pi\frac{\Delta}{4}s_1$$

. . . .

$$v_k = 2\pi\frac{\Delta}{4^k\,.\,2}s'_k + 2\pi\frac{\Delta}{4^k\,.\,2}s''_k = 2\pi\frac{\Delta}{4^k}\frac{s'_k + s''_k}{2} = 2\pi\frac{\Delta}{4^k}s_k$$

. . . .

Remplaçant s_0, s_1 ... s_k par leurs valeurs, on aura, si l'on désigne par a la distance du point A à l'axe de révolution,

$$v_0 = 2\pi\Delta\left(a + \frac{b}{3}\right)$$

$$v_1 = 2\pi\frac{\Delta}{4}\left(a + \frac{b}{3} + \frac{b}{4}\right)$$

$$v_2 = 2\pi\frac{\Delta}{4^2}\left(a + \frac{b}{3} + \frac{b'}{4} + \frac{b}{4^2}\right)$$

. . . .

La sommation de ces égalités conduit à l'expression

$$v = 2\pi\Sigma\left(a + \frac{2}{5}b\right)$$

pour le volume du corps engendré par la rotation du segment parabolique.

Il va de soi que si l'axe de révolution est situé du côté convexe de la courbe, il faudra inverser le signe du terme en b.

En envisageant un segment parabolique limité par une perpendiculaire à l'axe de ce segment, il sera facile de déduire de l'égalité ci-dessus, la formule pratique suivante pour la cubature des tonneaux :

$$v = \frac{\pi}{60}l(8D^2 + 4Dd + 3d^2) ,$$

l désignant la distance des fonds, d leur diamètre et D le diamètre intérieur maximum.

F.-R. SCHERRER (Kusnacht, Zurich).