

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 15 (1913)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR RENSEIGNEMENT DE LA THÉORIE DES INTÉGRALES ABÉLIENNES
Autor: Tikhomandritsky, M.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-14870>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 18.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

plan $XYX'Y'$. Ceci ne serait possible que si le contour OO_1O_2 était dans un plan, ou si à l'intérieur la surface était concave. L'un et l'autre cas doivent, d'après (15) (16) (17), être exclus et cette impossibilité ne disparaît que si la développée quasi triangulaire (fig. 12) dans le plan $XYX'Y'$ se réduit à un point unique le cylindre de roulement se réduisant alors à un axe de rotation. Le mouvement de la droite $X''X'''$ engendre donc un cercle.

Le plan bissecteur $XYX'Y'$, ayant été pris à volonté, on en conclut que tout plan bissecteur coupe le corps suivant un cercle. Ceci s'applique en particulier au plan bissecteur mobile qui, tournant autour d'un diamètre, engendre alors une sphère, c. q. f. d.

(20) Spécialement, quant à la forme à adopter pour calottes de chaudières, têtes de bouées, corps d'aérostats... etc., on peut généraliser facilement pour la calotte sphérique ce qui vient d'être démontré pour la sphère entière; à savoir:

Parmi toutes les formes de surface d'une étendue donnée, pouvant constituer la clôture d'une ouverture circulaire, la calotte sphérique possédant cette étendue offre le contenu maximum, car le volume de la sphère entière à laquelle appartient cette calotte, ne pourrait être que diminué, si on la remplaçait par tout autre surface de clôture ayant même étendue.

Max Edler v. LEBER (Vienne, Autriche).

SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA THÉORIE DES INTÉGRALES ABÉLIENNES

La théorie des intégrales abéliennes, à laquelle se rattachaient, au siècle passé, tant de grands noms depuis ABEL à WEIERSTRASS, maintenant que l'on est arrivé à trouver sa vraie forme, simple, élégante et toute naturelle, n'attire guère l'attention que d'un très petit nombre de mathématiciens. A quoi cela tient-il?

En laissant de côté les causes subjectives, comme les préjugés, par exemple, et en passant directement aux causes objectives, on les trouve dans la marche historique du développement de cette théorie. Le génie d'Abel a brillamment commencé la théorie des intégrales qui portent maintenant son nom immortel, en analysant les divers cas particuliers de son célèbre théorème, directement,

avec les moyens très simples d'analyse de son temps¹. Arraché à la science par une mort prématurée, il a laissé à d'autres le développement ultérieur de la théorie. Plusieurs savants allemands ont pris, par la suite, des routes très diverses pour constituer une théorie des intégrales abéliennes, en partant chacun du domaine des mathématiques dont il s'occupait plus spécialement. L'analyse mathématique possède maintenant cinq méthodes principales; en voici la liste disposée dans l'ordre chronologique de leur apparition : 1. GÖPEL et ROSENHAIN. — 2. RIEMANN. — 3. CLEBSCH et GORDAN. — 4. WEIERSTRASS. — 5. DEDEKIND et WEBER.

1. — Après que JACOBI, arrivé par l'étude des développements des fonctions elliptiques en séries à la fonction θ d'une variable, eut montré dans ses leçons comment on peut, inversement, en partant de la fonction θ arriver aux fonctions et intégrales elliptiques, cette voie inverse fut suivie, non sans succès, par GÖPEL et ROSENHAIN (chacun indépendamment de l'autre), en étendant la définition de la θ -fonction au cas de deux variables. Ils résolvaient ainsi le problème de Jacobi dans le cas des intégrales hyperelliptiques de la 1^{re} classe. Mais par cette méthode *inverse* il n'est pas facile d'arriver, dans le cas général, aux intégrales abéliennes, comme on en peut juger par l'ouvrage de M. SCHOTTKY². Les difficultés « techniques », comme disait Weierstrass, restent encore très grandes, malgré les recherches ultérieures de divers savants distingués.

2. — S'occupant de la physique mathématique, RIEMANN était conduit naturellement à sa théorie générale des fonctions d'une variable complexe, par laquelle une telle fonction est définie complètement en vertu du principe de Dirichlet, lorsqu'on donne la manière dont elle devient infinie en certains points d'une surface et ses valeurs sur le contour de celle-ci. Je pense que c'est pour mettre à l'épreuve sa théorie générale des fonctions, qu'il l'a appliquée aux intégrales abéliennes prises suivant les courbes tracées sur une surface spéciale, portant son nom, appropriée à représenter uniformément l'ensemble de toutes les valeurs d'une fonction algébrique donnée. Ces surfaces de Riemann, qui arrêtent parfois les commençants, sont cependant dans la nature même des fonctions algébriques : Cauchy n'en était pas loin, car il faisait des coupures suivant des lignes, menées des points de ramification vers le contour de la surface considérée. Il ne lui restait qu'à rejoindre les bords des différents feuillets à la manière de Riemann. Les surfaces de Riemann resteront toujours dans la théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales, comme un moyen simple et précis d'indiquer brièvement la suite con-

¹ V. Mémoire XII dans ses « Œuvres » (nouvelle édition), t. I.

² SCHOTTKY, *Abriß einer Theorie der Abelschen Funktionen von drei Variabeln*. Leipzig, 1880.

tinue des valeurs de la fonction que l'on considère. Mais ce qui est étrange ici, c'est de s'appuyer sur le principe de Dirichlet pour démontrer l'existence de ce qu'on peut trouver à l'aide des opérations algébriques, c'est ce qui est d'après L. Kronecker : « der beste Existenzbeweis ». Cette méthode n'est ni la plus directe ni la plus naturelle. Du reste, la théorie des thêta-fonctions chez Riemann ne ressort pas des propriétés des intégrales abéliennes ; ces fonctions sont trouvées par généralisation de celle de Jacobi, comme l'avaient fait auparavant Göpel et Rosenhain, de sorte que la théorie de Riemann est fondée sur deux bases différentes, n'ayant aucun lien entre elles. Il n'en est pas ainsi dans la théorie des fonctions elliptiques, qui n'en sont que le cas le plus simple. L'artificiel de la théorie de Riemann ne l'a pourtant pas empêchée d'avoir un grand succès, qui dure jusqu'à nos jours, quoique les défauts principaux de cette théorie — le synthétisme d'exposition et ses deux bases étrangères sans aucun lien entre elles, — aient été signalés déjà par Clebsch et Gordan neuf ans après et les aient poussé à construire la théorie des intégrales abéliennes sur une autre base, comme ils l'expliquent dans la préface de leur « Theorie der Abelschen Funktionen ».

3. — CLEBSCH et GORDAN furent les premiers qui abordèrent en 1866 la théorie des intégrales abéliennes par la voie directe, en partant de la vraie source des propriétés de ces intégrales, de l'équation fondamentale qui définit l'irrationalité dont elles dépendent. Ils réussirent à tirer la théorie des thêta-fonctions de celle des intégrales abéliennes, en ramenant la résolution du problème de Jacobi, à l'aide du théorème d'Abel relatif aux intégrales abéliennes de troisième espèce, à l'étude des fonctions auxiliaires

$$T_{\xi\eta}\left(\begin{matrix} p \\ x_i \\ c_i \\ 1 \end{matrix}\right) = \sum_{i=1}^p \int_{c_i}^{x_i} d \prod_{\xi\eta}.$$

Cependant cette étude s'est montrée très pénible, d'une part, parce qu'ils n'ont pas changé les variables indépendantes en celles qu'indique le problème de Jacobi (comme l'ont fait depuis H. Weber, M. Noëther et K. Weierstrass), et, d'autre part, parce que, s'occupant beaucoup de la théorie des courbes, de celle des formes et de l'arithmétique supérieure, elle ne nous paraît ni naturelle ni simple. En partant de la vraie source — de l'équation fondamentale, elle ne suit pas la voie directe vers les fonctions-thêta, auxquelles de plus elle n'arrive pas, — mais dévie de cette route tantôt dans l'arithmétique, tantôt dans la géométrie. La notion même de « diviseur » ne nous paraît ni claire ni naturelle mais tout à fait étrangère.

On voit, par cet aperçu rapide, que chacune des cinq méthodes

de la théorie possède des inconvénients, plus ou moins grands, grâce auxquels la théorie des intégrales abéliennes est devenue très difficile à apprendre et en même temps ne donne pas soit par les restrictions, soit par des complications, une satisfaction complète au lecteur, tout en exigeant de lui beaucoup de travail superflu l'entraînant dans des régions étrangères à la théorie. Mais le même aperçu indique aussi dans quelle direction il faut chercher la vraie théorie : c'est WEIERSTRASS qui s'en est le plus rapproché ; mais M. NÆTHER dans la partie algébrique a fait encore un pas important en avant, en rendant à l'algèbre ce qui est son droit et son devoir.

La vraie théorie doit partir de l'équation irréductible fondamentale, définissant l'irrationalité tout à fait générale, dont dépend l'intégrale abélienne considérée, et étudier par les moyens algébriques la fonction implicite y de x , définie par cette équation, et son discriminant, lequel joue ici un rôle important ; elle doit donner le moyen de déterminer le genre de cette fonction au moyen d'opérations rationnelles. C'est ici qu'on est conduit naturellement à la surface de Riemann la plus simple et la plus générale, dont le secours dans cette théorie est précieux. Puis elle doit étudier des fonctions rationnelles de x et y , qui figurent dans les intégrales abéliennes, et parmi elles plus spécialement les fonctions adjointes des trois espèces, et montrer la réduction de la fonction générale à ces dernières — autrement dit — sa décomposition en éléments simples (l'analogue de celle des fractions rationnelles) ; ensuite en déduire l'identité fondamentale de Weierstrass ; donner aussi les moyens rationnels pour trouver les adjointes. Alors la partie transcendante sera bien préparée et ne présentera pas de difficultés. (C'est Weierstrass qui le premier a exprimé la pensée que l'étude circonstanciée des fonctions algébriques doit précéder l'étude de leurs intégrales). On aura de suite les deux formes de la décomposition en éléments simples de l'intégrale abélienne générale. En intégrant l'identité fondamentale suivant les courbes fermées A_h et B_h ($h = 1, 2, \dots, p$), on arrive aux relations entre les périodes des intégrales de première et de deuxième espèce de Weierstrass et de Riemann, qui jouent un grand rôle dans cette théorie ; en intégrant suivant une courbe non fermée, on arrive aux fonctions primaires. De là un pas vers la décomposition d'une fonction algébrique en produit de fonctions primaires, dont le célèbre théorème d'Abel n'est qu'un simple corollaire d'après Weierstrass. Ce théorème, appliqué aux intégrales de première espèce, conduit naturellement aux problèmes algébriques qui ont transporté les considérations et le langage géométriques dans la théorie des intégrales abéliennes, en adoptant aussi pour leurs différentielles la forme homogène d'Arionhold. De cette manière ils ont fait dépendre la théorie des inté-

grales abéliennes de celle des courbes algébriques. Si du cas simple, considéré par eux, où la courbe fondamentale n'a d'autres singularités que des points doubles et des points de rebroussement, on passe au cas général des singularités quelconques, on doit quitter l'étude des intégrales pour aborder l'étude des théories géométriques de rang plus élevé (comme on peut le voir par le livre de Clebsch-Lindemann). C'est ce que Clebsch prévoyait déjà en 1870, lorsqu'il disait à M. P. Mansion que « malgré les apparences contraires, sa méthode et celle de Riemann avaient moins d'avenir que celle de Weierstrass »¹, c'est-à-dire qu'il ne pensait pas qu'on pouvait aller très loin dans le développement de la théorie des intégrales abéliennes ni par sa méthode, ni par celle de Riemann, mais que cela réussirait probablement par la méthode de Weierstrass.

Cependant H. Weber a poussé la théorie de Riemann en ses deux mémoires (tome 70 du Journal de Crelle) vers celle de Clebsch, très perfectionnée par M. Noëther (dans la partie algébrique d'abord avec M. Brill), qui l'a rapprochée à son tour beaucoup de celle de Weierstrass, c'est-à-dire dans la direction prévue par Clebsch.

4. — La théorie de WEIERSTRASS aurait plus de droit que toutes celles considérées ci-dessus au titre de vraie théorie, car elle part de la vraie source — de l'équation fondamentale tout à fait générale, traite la partie algébrique avant la partie transcendante, et déduit d'une manière très simple et naturelle toute la théorie, d'une identité algébrique, — s'il ne la subordonnait pas à sa théorie générale des fonctions analytiques, en employant toujours dans ses démonstrations les développements en séries convenables pour l'endroit considéré de l'image algébrique (algebraisches Gebilde), ce qui n'est pas un mal au point de vue de l'unité de l'exposition, mais la rend souvent longue et lourde. Il vaudrait mieux démontrer *geometrica geometrica*, *algebraica algebraica*, *analytica analytica*, comme on le voit, en confrontant les recherches de M. Noëther dans ses 4 notes d'Erlangen (1884), avec les leçons de Weierstrass ; c'est ce que j'ai eu le bonheur de faire la même année au séminaire mathématique de l'Université de Leipzig. C'est là que m'est venue alors une première idée d'une nouvelle exposition de la théorie des intégrales abéliennes.

5. — La théorie de DEDEKIND et WEBER étant alors (1884) représentée par leur mémoire, l'est maintenant avec tous les développements pour la partie algébrique (avec les applications à la théorie des courbes algébriques) et pour la partie transcendante jusqu'à l'introduction des θ exclusivement, dans le livre de MM. K. Hensel et G. Landsberg. Intéressante et conçue d'un point de

¹ V. *Revue des Questions scientifiques*, 20 octobre 1912, troisième série, t. XXII, p. 606.

vue élevé, elle subordonne la théorie des intégrales abéliennes aux conceptions de Jacobi. Appliquée aux intégrales de deuxième espèce et de troisième espèce, elle conduit naturellement, comme l'ont montré d'une part Clebsch et M. Nøther et d'autre part Weierstrass, à une fonction intermédiaire, menant à la définition simple de la fonction thêta, par la considération d'un cas particulier du théorème d'Abel, définition de laquelle on tire aisément ses propriétés principales et son développement en série d'exponentielles. Dans cet ordre tout se trouve à sa place, comme résultat naturel de ce qui le précède; c'est l'ordre qui répond à l'état actuel de la science, et c'est celui qu'il est recommandable de suivre maintenant dans l'enseignement, si l'on veut attirer à l'étude de cette belle théorie le plus grand nombre possible d'étudiants. Cette voie naturelle et simple malgré une généralité complète, est la plus brève, la plus élégante, et par conséquent la plus capable de donner satisfaction en préparant plus vite aux questions plus élevées et plus difficiles que des éléments qu'il est temps à tous les mathématiciens de connaître, comme cela était le cas au siècle passé pour les intégrales elliptiques.

C'est pour faciliter la réforme dans l'enseignement des éléments de la théorie des intégrales abéliennes, — réforme demandée par l'état actuel de la science, — que j'ai composé mon livre sous le même titre¹.

M. TIKHOMANDRITSKY (St-Petersbourg).

¹ *Eléments de la théorie des intégrales abéliennes*. Nouvelle édition, revue, corrigée, complétée de notes et en partie refaite entièrement. St-Petersbourg, 1911 (8° de XV-286 p.), à la librairie de Eggers & Co, St-Petersbourg (Russie), Moïka, 42. [Nous analyserons cet ouvrage dans un prochain numéro. — Réd.]