

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 16 (1914)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE  
**Kapitel:** IV. — Applications du Calcul infinitésimal.

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 04.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

le Calcul différentiel et le Calcul intégral. L'introduction simultanée des deux notions fondamentales ne présente que des avantages, même dans l'exposition du Calcul différentiel.

Les commencements du Calcul intégral sont divers ; dans certaines écoles, l'intégrale définie est enseignée avant l'intégrale indéfinie, dans d'autres, la marche est inverse. Les écoles allemandes pratiquent les deux méthodes ; en France, seule la fonction primitive est enseignée ; en Autriche, l'intégrale définie précède l'intégrale indéfinie, sauf dans certaines écoles de Bohême où, d'après le rapport envoyé par M. le professeur *Bydzovsky*, les notions de dérivée et d'intégrale sont introduites simultanément. En Suisse aussi, on enseigne l'intégrale définie d'abord, l'intégrale indéfinie ensuite ; en Russie et en Danemark, la marche inverse est suivie. Le plan d'études italien ne fait introduire que l'intégrale définie et cela à propos de la détermination des aires (qui se fait d'abord sur papier quadrillé) ; mais je crois que cela ne doit pas exclure la définition de la fonction primitive, d'autant plus que les instructions mentionnent la détermination des chemins parcourus dans un mouvement uniformément accéléré. Parmi les ouvrages anglais les plus répandus, ceux de MM. *Mercer* et *Gibson* commencent par la fonction primitive et celui de M. *Edwards* par l'intégrale définie.

Les deux méthodes ont, sans doute, chacune leurs avantages scientifiques et didactiques propres. Dans l'exposition rigoureuse d'un cours de Faculté, où l'existence de l'intégrale définie est démontrée, celle-ci doit précéder la fonction primitive, la notion d'aire étant l'objet d'une définition spéciale. Parmi les traités d'Analyse les plus connus, celui de M. *Jordan*, par exemple, expose la théorie de l'intégrale définie avant celle de la dérivée, ce qui est légitime pour la seule raison (et il en existe d'autres) que l'ensemble des fonctions intégrables est plus étendu que celui des fonctions dérivables. Dans l'enseignement secondaire où l'aire, le volume et la longueur d'un arc de courbe doivent être considérés comme des notions primitives, il est le plus sage, je crois, de suivre le conseil de *Poincaré* qui dit (*loc. cit.*) : « Alors ce qui reste à faire est bien simple : définir l'intégrale comme l'aire comprise entre l'axe des  $x$  et deux ordonnées de la courbe ; montrer que, quand l'une des ordonnées se déplace, la dérivée de cette aire est précisément l'ordonnée elle-même. C'est le raisonnement de *Newton*, c'est comme cela que le Calcul intégral est né et, bon gré mal gré, il faut repasser par où nos pères ont passé. »

#### IV. — Applications du Calcul infinitésimal.

a) *Série de Taylor*. Notre questionnaire se rapportait aussi à la démonstration de la formule de Taylor, à la détermination du

reste et à l'interpolation. Il ressort des réponses que la formule de Taylor figure sur peu de programmes de l'enseignement secondaire; elle est néanmoins enseignée dans les écoles secondaires allemandes où le plan d'études embrassait depuis longtemps les séries infinies: dans les écoles réales de Prusse, de Bavière, de Wurtemberg et de Hambourg, dans quelques écoles suisses et autrichiennes, dans les écoles danoises, dans les groupes mathématiques des écoles anglaises et dans les classes de Mathématiques spéciales en France. Là, où l'on enseigne la série de Taylor, on établit les séries de  $e^x$ ,  $a^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\log(1+x)$ ,  $(1+x)^m$  et  $\text{arc tg } x$  (la dernière en vue, surtout, du calcul de  $\pi$ ). Cependant l'étude des manuels scolaires nous porte à penser que *ce terrain n'est pas encore suffisamment préparé pour l'école*. L'ancienne théorie des séries infinies, qui évite soigneusement de faire appel à la notion de dérivée et qui opère habituellement avec la méthode des coefficients indéterminés et avec certaines relations fonctionnelles, n'est pas entièrement balayée du terrain, et on aperçoit çà et là des restes de la « méthode pure » de l'Analyse algébrique qui fut très en honneur dans la seconde moitié du siècle dernier.

Je ne veux pas traiter ici en détail des questions de méthode, ni analyser minutieusement quelque manuel scolaire. J'ouvrirais ainsi des discussions portant sur la méthode de tel ou tel chapitre de l'enseignement et nous autres, professeurs, nous savons bien que ces discussions, une fois commencées, semblent ne jamais finir. Je me bornerai à faire une remarque générale, c'est que la didactique des mathématiques aurait la tâche de changer les grandes valeurs scientifiques en petites monnaies pour qu'un élève puisse rassembler petit à petit sa fortune scientifique. Le plus souvent, hélas, ce changement ne se fait pas sans perte et il entre beaucoup de fausse monnaie dans la circulation.

Tant que les vérités mathématiques n'entrent pas à l'école sans déformation ou, du moins, sans grande déformation, nous ne pouvons considérer nos méthodes comme satisfaisantes. De ce point de vue je ne dissimule pas qu'aucune des méthodes proposées dans les manuels scolaires que j'ai pu examiner ne me paraît bonne pour établir la formule de Taylor. L'un de ces manuels, par exemple, parle de la série infinie de Taylor sans définir ce que c'est que la somme d'une série infinie; un autre affirme qu'une fonction  $f(x)$  est développable en série de Maclaurin, si elle admet des dérivées de tous les ordres, finies pour  $x = 0$ . On pouvait lire dans un livre, c'est à M. Klein que je dois cette information, que toute série entière avait pour rayon de convergence l'unité. Les nombreuses méthodes graphiques qu'on a inventées dernièrement pour évaluer le reste de la formule de Taylor ne sauraient être prises pour des démonstrations rigoureuses. M. F. Klein, qui manie avec virtuosité le Calcul différentiel

et intégral dans son cours déjà plusieurs fois mentionné, expose la théorie générale de la série de Taylor sans s'écarter essentiellement de la démonstration rigoureuse en usage, fondée sur le théorème de *Rolle*. Naturellement il sait mettre à profit, dans certains cas, les circonstances particulières pour tourner la difficulté de la détermination du reste.

Quelque grande que soit l'importance attribuée à la série de Taylor, qui ouvre un monde nouveau devant l'élève des écoles secondaires en lui faisant voir les expressions analytiques des fonctions  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\log(1+x)$ ,  $\operatorname{arctg} x$  connues jusqu'ici par les tables seulement et en lui enseignant la formule générale du binôme établie, par des moyens élémentaires, seulement pour des exposants entiers et positifs : l'exposition de la théorie de la série de Taylor est, je crois, au point de vue des méthodes, un problème irrésolu aujourd'hui. Nous attendons des éclaircissements sur ce sujet des observations de MM. les délégués ici présents.

Cependant, la formule de Taylor, en la limitant au terme du deuxième ordre, peut s'établir facilement et à l'abri de toute objection, ce qui se voit dans plusieurs manuels scolaires. Cela est, selon mon avis, pleinement suffisant pour les besoins les plus urgents de l'enseignement secondaire : usage des tables de logarithmes et des tables de fonctions circulaires, évaluation de l'erreur, justification de l'interpolation linéaire. Pourtant on doit constater que même dans les écoles où la formule ou la série de Taylor sont enseignées, on néglige ces applications. Elles seraient pourtant utiles pour bien faire comprendre le sens de certains procédés qu'on emploie mécaniquement dans les écoles.

b) *Maximum et minimum*. On s'accorde généralement sur la méthode à appliquer pour les problèmes de maximum et de minimum. On sent partout que ces problèmes sont peut-être la partie la plus intéressante des matières nouvelles de l'enseignement secondaire et qu'ils ont, en outre, une importance universelle qui dépasse les cadres de l'enseignement. Dans plusieurs États, ils étaient toujours traités ou par des moyens algébriques élémentaires en se bornant aux fonctions du second degré ou par des méthodes en usage avant l'introduction de la langue du Calcul différentiel, méthodes qui cachaient, en réalité, des différentiations.

Les dérivées du premier et du second ordre apportent ici l'économie, l'unité et l'ordre de sorte que, presque partout, les anciennes méthodes sont tombées en désuétude. Il est regrettable que, dans quelques États, en conséquence de la manière dont on a incorporé les matières nouvelles, ces vieilles méthodes de calcul des maxima et des minima aient subsisté. C'est à regretter surtout parce qu'il faudrait éviter jusqu'à l'apparence même que les matières nouvelles soient placées à côté et au-dessus des anciennes, ne servant qu'à augmenter les matières de l'enseignement.

c) *Applications physiques*. Il va sans dire — et les réponses reçues nous apportent à ce sujet une pleine confirmation — que la dérivée une fois définie est utilisée en Physique pour définir la vitesse et l'accélération. Cachée, elle intervenait toujours dans l'enseignement de la physique; qu'elle intervienne ouvertement et c'est déjà un succès des idées nouvelles. Dans la Plupart des écoles allemandes, le Calcul infinitésimal trouve une application plus étendue : on s'en sert pour déterminer des centres de gravité, des moments d'inertie, le potentiel, le mouvement du pendule, la variation de la hauteur du baromètre avec l'altitude, etc.; on s'en sert en Autriche pour l'étude du potentiel; en Bohême et Danemark, pour déterminer aussi des centres de gravité et des moments d'inertie. Dans les écoles hongroises qui ont adopté l'enseignement du Calcul infinitésimal, on l'utilise dans une foule d'applications physiques, surtout si l'enseignement des Mathématiques et celui de la Physique sont donnés par le même professeur. Il y a cependant des chapitres de la Physique où les méthodes infinitésimales sont peu employées; elles sont rarement employées en Optique (dans certaines écoles allemandes seulement) et en Electrodynamique (dans des écoles allemandes, autrichiennes et hongroises). Comme le remarque justement M. *Possé*, auteur du rapport sur la Russie, en Physique, on ne se sert généralement que des Mathématiques élémentaires.

Le mouvement réformiste ne peut être considéré comme achevé tant que nous voyons les notions fondamentales de la Mécanique enseignées indépendamment des éléments du Calcul infinitésimal. L'avenir fera régner certainement l'harmonie, si désirable au point de vue pédagogique, entre les enseignements qui s'occupent, l'un de l'étude des fonctions et l'autre des phénomènes physiques et chimiques. M. *Timerding*, membre de la Sous-commission allemande, a publié sur ce sujet, pour la Commission internationale, une brochure du plus haut intérêt. Après avoir tracé un tableau historique du développement des méthodes infinitésimales, il soumet à une critique sévère, mais juste, les méthodes qu'on emploie en Physique et qui font usage du Calcul infinitésimal sans l'avouer; il dénonce les défauts de ces Compléments sur le Calcul infinitésimal, écrits à l'usage des physiciens qui sont, selon lui, la honte de la littérature mathématique, et il indique sur plusieurs exemples la marche irréprochable qu'on devrait suivre en appliquant le Calcul infinitésimal à traiter des problèmes de Physique. « Le Calcul infinitésimal, dit M. *Timerding*<sup>1</sup>, rend, en Physique, les services qu'on attend d'une méthode satisfaisante aux points de vue scientifique et pédagogique : notations claires où apparaît la nature des choses, et déductions simples, dénuées

<sup>1</sup> *TIMERDING, Die Mathematik in den physik. Lehrbüchern*, p. 108.

d'artifice ; de plus, il débarrasse la marche de l'enseignement physique des déductions mathématiques encombrantes et insuffisantes. »

Nous sommes loin de considérer la transformation de l'enseignement de la Physique, comme achevée dans tous les Etats ; mais l'intérêt de l'enseignement secondaire exige impérieusement que les idées nouvelles dont nous aspirons à la réalisation dans l'enseignement mathématique, pénètrent à fond l'enseignement physique. Celui-ci en deviendra plus vrai, plus sincère, plus simple, plus économique, plus complet par les forces et le temps gagnés et il réagira, à son tour, sur l'enseignement mathématique en le rendant plus pratique, plus facile à comprendre, plus uni et répondant mieux à l'idéal scientifique.

d) *Applications géométriques.* Le Calcul intégral est appliqué partout où il est enseigné à déterminer des aires et des volumes. Cela ne pourrait pas être autrement et là est principalement le caractère économique de l'introduction des méthodes nouvelles dans l'enseignement secondaire. Si l'on songe aux difficultés de la détermination des volumes du prisme oblique, de la pyramide et de la sphère, au calcul — qu'on effectue en quelques endroits — de l'aire de l'ellipse et d'un segment de parabole, il faut saluer comme un affranchissement l'introduction du Calcul intégral dans toutes ces questions. Pourtant, il me faut constater une fois de plus qu'on continue à appliquer, pour la détermination des aires et des volumes, les méthodes anciennes et, dans la plupart des cas, le principe sans beaucoup de valeur didactique de Cavalieri, même après avoir exposé les notions fondamentales du Calcul intégral. Cela tient assurément, d'une part, à ce que le Calcul infinitésimal n'a pas pénétré entièrement la matière de l'enseignement mathématique et, d'autre part, que les transformations ne se font que très lentement dans la vie des écoles. M. Klein dit avec justesse<sup>1</sup> : « Quand il s'agit de faire entrer des développements nouveaux, la loi de l'hystérésis se manifeste plus forte dans les Mathématiques que dans d'autres Sciences. Une idée mathématique nouvelle ne trouve le chemin de l'école que si des professeurs des Facultés la mettent en relief dans leurs cours, s'ils forment des générations de professeurs de lycée qui la représentent et enfin, si ceux-là lui donnent une forme propre à favoriser la propagation ; elle tombe à la fin dans le domaine public et une place lui est désignée dans les institutions scolaires. Et cela dure le plus souvent des dizaines d'années. » Je crois que la transformation du calcul des aires et des volumes ne s'accomplira aussi que dans quelques dizaines d'années. Il n'y a là rien qui doive nous surprendre ; ce n'est pas seulement la force de l'habitude

<sup>1</sup> KLEIN-RIECKE, p. 11.

qui conduit le professeur à appliquer les méthodes usuelles et, en particulier, la méthode d'exhaustion, c'est aussi, et surtout, la beauté de ces méthodes et l'admiration devant l'œuvre grandiose de l'antique esprit de la Grèce. Je crois fermement qu'un jour la situation sera complètement changée : l'enseignement secondaire utilisera, en vue de l'utilité, de l'économie et de la simplicité, le Calcul intégral et notamment la fonction primitive pour déterminer des aires et des volumes, et à l'Université on enseignera aussi les découvertes ingénieuses d'Eudoxe et d'Archimède pour perpétuer le souvenir des œuvres et des méthodes créatrices grecques et pour former la génération future des savants.

### V. — La question de la rigueur.

Le Comité central désirait en outre savoir, dans quelle mesure on faisait appel à la rigueur en enseignant le Calcul différentiel et intégral dans les écoles secondaires des différents Etats ; il ne lui faisait pas de doute que c'était là le point le plus délicat. C'est surtout du côté de l'enseignement supérieur qu'on entend se plaindre que l'enseignement secondaire fait plus de mal que de bien s'il n'adopte pas les méthodes rigoureuses d'une exposition scientifique ; par contre, les représentants de l'enseignement secondaire affirment que l'intelligence moyenne des élèves ne permet pas une exposition rigoureuse du Calcul différentiel et intégral. Où est donc la vérité ? L'avènement de l'entière rigueur n'est pas accompli de longue date dans les Mathématiques supérieures. Une étude historique nous montre qu'aux commencements on n'exigeait pas une définition précise des notions, ni des déductions logiques irréprochables. C'était peut-être favorable au progrès. Comme M. *Picard* dit : « dans les époques vraiment créatrices, une vérité incomplète ou approchée peut être plus féconde que la même vérité accompagnée des restrictions nécessaires. Si, par exemple, *Newton* et *Leibniz* avaient pensé que les fonctions continues n'ont pas nécessairement une dérivée, ce qui est le cas général, le Calcul différentiel n'aurait pas pris naissance ; de même les idées inexactes de *Lagrange* sur la possibilité des développements en série de Taylor ont rendu d'immenses services et il est heureux que *Newton* ait eu, au début de ses recherches, pleine confiance dans les lois de *Képler*<sup>1</sup>. » Cet état primitif, précédant la critique scientifique, était peut-être propice aux progrès des Sciences ; les inventeurs n'ont pas vu des barricades se dressant de tous côtés ; ils croyaient que l'infini s'ouvrait devant eux ; ils ont mis une confiance exagérée dans leurs forces et dans la force

<sup>1</sup> PICARD, *La Science moderne*, p. 52.