

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 16 (1914)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Kapitel: Premier Congrès de Philosophie mathématique.
Autor: Reymond, Arnold

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 04.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

CHRONIQUE

Le Premier Congrès de Philosophie mathématique ¹.

Paris, 6-8 avril 1914.

Le premier Congrès de Philosophie mathématique a eu lieu à Paris du 6 au 8 avril 1914, sous les auspices de la Société française de Philosophie, et comme suite à la Conférence internationale de l'Enseignement mathématique. Les séances se tinrent à la Sorbonne, sous la présidence de M. Xavier LÉON, directeur de la Revue de Métaphysique et de Morale, et principal organisateur de la réunion.

Le dimanche 5 avril, à 4 heures, une réception des plus cordiales, offerte par M. et M^{me} X. LÉON, permettait aux membres du Congrès de faire connaissance.

La *séance générale d'ouverture* eut lieu le lundi matin sous la présidence de M. Emile BOUTROUX, membre de l'Institut et président d'honneur du Congrès.

M. X. LÉON exposa tout d'abord les origines de cette réunion de philosophes et de mathématiciens.

Dans son discours d'ouverture, M. E. BOUTROUX a commencé par rappeler le nom de M. Henri POINCARÉ, son beau-frère, dont le souvenir est présent dans tous les cœurs ; il salue les congressistes au nom de cette chère mémoire. Puis il étudie les rapports de la philosophie avec les sciences et plus spécialement avec les mathématiques. Cette étude, remarquable par la richesse et la hauteur de ses vues aboutit à la conclusion que voici : Comme son histoire le montre, la philosophie ne peut se développer que par un contact intime avec les sciences ; mais sous peine de manquer à sa mission elle ne doit se laisser absorber par aucune d'entre elles et maintenir jalousement son autonomie.

M. TIMERDING expose ensuite les difficultés très grandes qu'il y a à organiser le plan et la matière des ouvrages qui, dans l'*Ency-*

¹ Les travaux et les discussions du Congrès feront l'objet d'un numéro spécial de la *Revue de Métaphysique et de Morale* dirigée par M. X. LÉON. Librairie Arm. Colin, Paris.

clopédie des Sciences mathématiques, seront consacrés à la philosophie. Les rapports qui existent entre les mathématiques et la philosophie ont été et sont encore trop étroits pour que l'on puisse négliger cette dernière; mais comment les comprendre? Quelles sont les questions philosophiques qui sont d'un intérêt vital pour les mathématiques? M. Timerding espère que le nouveau Congrès qui s'ouvre permettra de préciser en partie ce problème.

Les séances suivantes furent consacrées à la lecture et à la discussion des travaux énumérés ci-après:

M. P. LANGEVIN: *Le temps local*.

M. H. DINGLER: *Sur la théorie des Sciences de Henri Poincaré*.

M. DIENES: *Symbolisme et réalité dans les mathématiques*.

M. L. COUTURAT: *De l'abus de l'intuition dans l'enseignement mathématique*.

M. E. LE ROY: *Les démarches essentielles de la pensée mathématique en analyse pure*.

M. F. ENRIQUES: *L'infini mathématique*.

M. A. REYMOND: *L'infini géométrique et l'intuition*.

M. D. KÖNIG: a) *Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre von J. König*. — b) *Sur un problème de la théorie générale des ensembles*.

M. A. PADOA: *Des conséquences d'un changement d'idées primitives dans une théorie déductive quelconque*.

M. H. DUFUMIER: *La logique des classes et la théorie des ensembles*.

M. A.-N. WHITEHEAD: *La relation d'espace* (the relational theory of space).

M. L. NELSON: *Ueber die Grundlagen der Geometrie*.

M. J. HADAMARD: *Propriétés intrinsèques de l'espace*.

M. J. HADAMARD: *Le calcul fonctionnel, analyse et synthèse*.

M. L. BRUNSCHVICG: *L'arithmétique et la théorie de la connaissance*.

M. M. WINTER: *Le temps et la mécanique héréditaire*.

Dès lundi après midi et jusqu'au mercredi soir, les séances furent toutes consacrées à l'étude critique des travaux qui figuraient au programme. Les communications avaient été groupées suivant leur contenu, ce qui contribua à donner plus d'unité aux discussions; mais, comme le fit remarquer M. FEHR à la fin du Congrès, peut-être y aurait-il eu avantage à limiter et à concentrer encore les sujets que l'on se proposait d'étudier.

Dans la séance du lundi après-midi, M. LANGEVIN donne tout d'abord, d'après ses propres idées et en tenant compte des récents travaux d'Einstein, un exposé magistral et complet de la question que soulève *le temps local*. M. ABRAHAM fait des réserves sur les conclusions formulées par M. Langevin. Le groupe de transformations défini par Einstein est bien plus un programme de recherches qu'un fait établi, car en tant qu'il caractérise une pro-

priété d'invariance il doit s'appliquer à toutes les forces physiques, y compris le champ de gravitation, ce qui n'est pas le cas.

M. DINGLER lit ensuite sa communication *sur la théorie des sciences d'Henri Poincaré*. Il montre que sur ce point les idées du grand mathématicien ne sont pas aussi contradictoires qu'elles le paraissent à première vue. Pour les comprendre il faut distinguer « deux espèces de recherches : a) l'une opérant avec des conventions et b) l'autre opérant par l'expérience. En trouvant les frontières qui les séparent l'une de l'autre on peut montrer comment elles peuvent subsister simultanément ». M. PADOA loue M. Dingler d'avoir dissipé les équivoques que le style subtil et paradoxal de Poincaré a pu faire naître chez certains esprits faibles et d'avoir montré que ses théories ne donnent pas le droit de contester la valeur de la science.

M. DIENES résume les théories essentielles d'un remarquable travail intitulé : *Symbolisme et réalité dans les mathématiques*. Les symboles mathématiques ont pour caractère essentiel de constituer un système ; ils forment un tout auquel chacun d'eux est lié d'une façon indissoluble. Pris isolément, les termes n'ont aucun sens mathématique. La construction d'un système dit mathématique n'est ni déductive ni inductive ; mais elle procède par généralisations successives. Les mathématiques ne forment pas un ensemble de conventions arbitraires, à moins de procéder comme Hilbert et de dépouiller les signes de toute signification. On peut ne pas symboliser le côté systématique de la réalité sensible ; mais si l'on s'engage dans cette voie, les mathématiques surgissent inévitablement et c'est pourquoi elles ont une objectivité indéniable.

Dans son étude sur « l'Abus de l'intuition dans l'enseignement mathématique », M. L. COUTURAT pose le problème suivant : Quelle place convient-il d'attribuer respectivement à la logique et à l'intuition dans l'enseignement des mathématiques ? Il conclut en disant qu'après avoir pris dans la réalité intuitive et objective une base suffisamment large, la démonstration doit procéder par voie déductive, s'interdire tout appel à l'intuition et pratiquer la méthode même qu'Euclide croyait ou voulait employer. D'après M. HADAMARD on ne saurait faire dans l'enseignement secondaire la part trop grande à l'intuition ; ce qu'il faut réprimer c'est, non pas l'abus de l'intuition, mais l'insuffisance de la rigueur. La rigueur doit marcher de pair avec l'intuition, et par rigueur il faut entendre l'énoncé complet des axiomes nécessaires à une théorie déductive, et non la réduction de ces axiomes au plus petit nombre possible. Cette dernière tâche, en effet, doit être réservée à l'enseignement universitaire.

En France, dit M. BIOCHE, on s'efforce de ne pas sacrifier la rigueur dans l'enseignement élémentaire ; on se borne parfois à énoncer et à faire vérifier expérimentalement certaines proposi-

tions lorsque la démonstration en est trop complexe. M. PADOA fait remarquer que par abus de l'intuition il faut entendre simplement l'emploi des pseudo-démonstrations. Loin de masquer les appels à l'intuition, la logistique les met en pleine lumière par le fait qu'elle énonce tous les postulats d'une théorie déductive. M. COUTURAT estime qu'il y a équivoque sur le mot intuition. Celui-ci désigne, tantôt un recours à l'usage des yeux et des sens, tantôt une opération intellectuelle, irréductible et inanalysable. M. Couturat n'a jamais voulu condamner l'intuition sous la deuxième de ses formes. M. FONTENÉ, enfin, insiste sur la rigueur qui caractérise l'enseignement des mathématiques en France. Une figure n'est jamais introduite sans que l'on en ait démontré l'existence.

Malgré l'heure avancée, M. LE ROY sut retenir l'attention de l'auditoire par sa belle conférence sur « *les démarches essentielles de la pensée mathématique en analyse pure*. Par des exemples appropriés il montre qu'il y a dans les fonctions mathématiques un élément d'objectivité irréductible à l'analyse.

Le *mardi matin*, 7 avril, M. F. ENRIQUES aborde le problème de *l'infini mathématique*. L'idée de l'infini ne peut provenir uniquement de l'expérience; elle implique nécessairement l'intervention de la raison et se présente sous deux aspects: potentiel et actuel. Jusque-là, tous les philosophes sont d'accord; mais peut-on passer de l'infini potentiel à l'infini actuel? C'est sur cette question que les opinions divergent, et que les mathématiciens se partagent en réalistes et nominalistes pour employer une terminologie empruntée à la scolastique.

Les réalistes affirment l'existence d'un infini actuel, et cette affirmation, bien qu'elle soit indispensable comme méthode de recherche, repose cependant sur de faux principes qui sont les suivants: toute suite d'approximations successives a une limite; toute infinité est égale à une classe; à la limite on peut passer du fini à l'infini. Les nominalistes se refusent à accepter de semblables propositions parce qu'elles conduisent à des paradoxes comme celui énoncé par Galilée. D'autre part, Dubois-Reymond a montré que sous le nom d'idéalisme et d'empirisme les deux tendances qui viennent d'être caractérisées coexisteront toujours. Cantor, tout en se défendant d'être réaliste a essayé de surmonter la difficulté et de manier l'infini; mais il a dû recourir pour le nombre ω à un postulat d'existence; par suite il n'échappe pas aux difficultés que soulève le réalisme et que les antinomies de Burali-Forti ont mises en pleine lumière.

M. HADAMARD se défend d'être réaliste au sens défini par M. Enriques; il approuve les critiques adressées par Burali-Forti au cantorisme; mais d'autre part il admet le théorème de Zermelo suivant lequel le continu peut être bien ordonné, ce qui suppose

pour l'esprit la possibilité de concevoir une infinité de choix indépendants. Un certain réalisme touchant l'existence de l'infini est impliqué dans les mathématiques. La fonction de Dirichlet-Riemann ne peut sans cela être interprétée d'une façon satisfaisante. M. Borel bien que professant le nominalisme a cependant pris une attitude réaliste dans quelques-uns de ses plus remarquables travaux, par exemple dans la démonstration du théorème suivant : une série de Taylor, écrite au hasard, admet en général son cercle de convergence comme coupure. M. CAHEN fait remarquer que ce théorème recevra peut-être un jour une interprétation nominaliste comme cela est arrivé dans d'autres cas. M. ENRIQUES admet la fonction de Dirichlet-Riemann, parce que la notion en est suggérée par l'expérience ; mais cette suggestion fait défaut lorsqu'il s'agit de l'axiome de Zermelo, lequel suppose un choix extra-expérimental pour ainsi dire. M. LEBESGUE estime que M. Hadamard est plus ou moins conduit par sa conception à supposer l'existence d'une intelligence divine capable d'opérer une infinité de choix indépendants ; les mathématiques dans ce cas renfermeraient des théorèmes que nous ne pourrions jamais comprendre. S'engager dans cette voie c'est aboutir à l'axiome de Zermelo et aux antinomies cantorienne. MM. COUTURAT et DUFUMIER insistent sur la distinction qu'il faut faire relativement à ces problèmes entre la notion de loi et celle de correspondance. M. WHITEHEAD enfin parle des moyens que M. Russell et lui ont mis en œuvre dans les *Principia mathematica* pour échapper aux antinomies de l'infini.

La séance du mardi après-midi fut ouverte par deux communications de M. KÖNIG. Dans la première, M. KÖNIG résume les idées de son père sur la logique, l'arithmétique et la théorie des ensembles. Grâce à un choix judicieux d'axiomes et de définitions les contradictions relatives au transfini disparaissent et n'ont plus de sens. Dans sa deuxième communication M. KÖNIG donne la démonstration d'un problème concernant la théorie des ensembles et cela en s'appuyant sur l'axiome de Zermelo.

M. PADOA parle ensuite des conséquences d'un changement d'idées primitives dans une théorie déductive quelconque. Il commence par montrer l'intérêt de ce problème pour la coordination déductive de toute science. Etant donné le système d'idées primitives et le système de postulats sur lesquels repose une science, à quelles conditions peut-on en opérer la réduction et en découvrir de meilleurs ? Lorsqu'il s'agit des postulats, le problème est très simple ; mais dans le cas d'une déduction des idées primitives la tâche est plus délicate et demande une série d'opérations que M. Padoa analyse avec grand soin.

M. H. DUFUMIER dans son étude sur la logique des classes et la théorie des ensembles se propose de montrer que sous sa forme

systematique l'algorithme des classes doit être considéré comme une généralisation de la théorie des ensembles. La signification logique du concept ne réside pas dans son extension, c'est-à-dire dans une fonction numérique, mais bien dans le fait qu'il peut être affirmé ou nié. Or la notion d'ensemble dépouillée des déterminations qui l'acheminent vers la notion de nombre se ramène à ceci : délimiter dans un univers donné et par rapport à cet univers un domaine d'objets qui répondent à une désignation définie à l'exclusion de tous les objets qui n'y satisfont pas. Classe et ensemble reposent donc sur le même fondement logique.

M. PADOA critique cet exposé et reproche en particulier à M. Dufumier d'avoir dans son exposé historique commis des erreurs en ce qui concerne l'emploi des symboles de subsomption. M. DUFUMIER déclare que M. Padoa ne l'a pas compris. L'emploi défectueux des symboles que celui-ci lui reproche avait précisément pour but de mettre en lumière leur imperfection.

M. ARNOLD REYMOND résume sa communication sur *l'infini géométrique et l'intuition*. Mathématiquement on peut ramener le problème de l'infini géométrique à celui de l'infini analytique ; logiquement on peut le définir comme un élément idéal par rapport à d'autres éléments dits réels ; mais philosophiquement un problème subsiste. Pour le résoudre il faut distinguer entre l'intuition et la transintuition géométriques, l'une et l'autre concevant l'étendue comme homogène et continue. Cela étant, la considération des éléments à l'infini fait toujours intervenir une dimension spatiale de plus que ce n'est le cas pour ces mêmes éléments envisagés dans le fini. En outre, l'infini géométrique implique des caractères à la fois statiques et dynamiques. En effet, les éléments de l'infini soutiennent avec ceux du fini des rapports constants de position et de situation. D'autre part, ces rapports ne peuvent être explicités autrement que par des nombres et le dynamisme qui est propre à la loi de la numération s'introduit dans la notion de l'infini géométrique et la rend transintuitive.

M. ENRIQUES ne croit pas qu'une dimension nouvelle intervienne nécessairement dans la considération des éléments à l'infini. La droite peut être définie sans être considérée comme une ligne fermée. M. REYMOND répond que logiquement cela est en effet possible ; mais, du point de vue de l'intuition, la droite indéfinie ne peut être conçue autrement que comme une ligne fermée. Une discussion s'engage ensuite entre MM. FONTENÉ, LANGEVIN et ENRIQUES sur les espaces à n dimensions.

Le *mercredi matin* 8 avril, M. A.-N. WHITEHEAD donne une étude approfondie sur la *relation d'espace*. Cette étude utilise un symbolisme trop technique pour que nous puissions la résumer ici. Disons seulement que M. Whitehead fait ressortir avec netteté les divers sens attribués au mot espace. Il y a tout d'abord un espace

apparent qui comprend lui-même deux catégories : l'espace apparent immédiat qui varie d'un individu à l'autre et l'espace apparent complet auquel se réfère le commun des hommes dans la conversation. Vient ensuite l'espace physique qui est celui d'un monde hypothétique d'objets, le même pour tous, et qui correspondrait exactement à nos sensations. Reste enfin l'espace abstrait auquel correspond la géométrie abstraite.

Il existe de nombreux espaces apparents immédiats et de nombreux espaces abstraits. Il est d'usage de supposer qu'il n'y a qu'un espace apparent complet et qu'un espace physique, ce qui est contestable pour ce dernier.

Cela étant, M. Whitehead développe la thèse suivante. Pour établir les fondements de la géométrie il ne faut pas prendre comme idées primitives et indéfinissables les notions de points, lignes, etc., car l'on est alors fatalement conduit à une théorie absolue de l'espace qui, nominalement du moins, est universellement abandonnée. Pour conserver un sens à la relativité de l'espace il faut définir les points en fonction des relations qui existent entre objets et M. Whitehead montre comment une telle définition peut être établie.

M. HADAMARD signale un rapprochement intéressant entre les idées de M. Whitehead sur la limite conceptuelle et celle que M. Fréchet a développées dans sa thèse. M. DINGLER fait remarquer que les opinions de M. Whitehead sont en désaccord avec les conclusions adoptées par M. Russell dans les *Principles of mathematics*. M. WHITEHEAD réplique en disant que sa collaboration avec M. Russell n'empêche pas certaines divergences de vues et que du reste celui-ci a évolué dans ses idées sur l'espace.

Avec la maîtrise et la compétence que l'on sait, M. HADAMARD expose ensuite deux sujets du plus haut intérêt. Le premier concerne une façon nouvelle et ingénieuse de concevoir *les propriétés intrinsèques de l'espace* par analogie avec la périodicité qui caractérise les fonctions elliptiques. Quant au second il traite du *calcul fonctionnel, analyse et synthèse* ; mais il ne saurait être résumé en quelques lignes seulement.

Le mercredi après-midi, M. L. NELSON donne lecture de son travail sur *les fondements de la géométrie*. D'après lui, on oscille constamment dans l'étude de cette question entre deux théories opposées qui sont l'empirisme et la logistiquie ; comme chacune d'elles s'affirme en niant l'autre, la lutte est sans issue. Si en désespoir de cause on les rejette l'une et l'autre on aboutit au conventionalisme ; mais cette solution est aussi fautive que les deux autres. C'est dans une synthèse féconde que la vraie solution sera trouvée. Cette synthèse a pour base une intuition à priori et une série de propositions démontrant que seule la géométrie euclidienne répond à la vérité géométrique intégrale.

M. ENRIQUES conteste qu'il y ait une intuition à priori de la géométrie euclidienne. Plusieurs géométries sont également possibles ; mais par l'expérience nous finissons par acquérir l'intuition de l'espace euclidien, et celle-là seulement. M. PADOA estime que l'on ne saurait opposer l'expérience et la logique ; elles représentent deux moments successifs et non simultanés dans l'évolution de la science. On ne saurait, d'autre part, réaliser intuitivement un espace non euclidien avec des éléments tirés de l'espace euclidien. M. FONTENÉ, enfin, développe des considérations sur la géométrie générale en s'inspirant des idées de Cayley.

M. BRUNSCHVICG résume brièvement sa communication sur *l'Arithmétique et la théorie de la connaissance*. Il conclut en disant que certaines conceptions comme le nominalisme et le réalisme sont dépassées. Ce qui importe, c'est de saisir la connexion entre l'activité de l'intelligence et l'épreuve des faits.

La dernière communication annoncée au programme était celle de M. WINTER : *le temps et la mécanique héréditaire*. En voici les idées essentielles. D'après M. Picard, un système est dit non-héréditaire si son état futur ne dépend que de l'état actuel et de l'état infiniment voisin ; il est héréditaire dans le cas contraire. L'étude du mouvement d'un projectile dans le vide appartient au premier type ; quand au second, on peut en donner, outre les phénomènes d'hystérésis, l'exemple pratique suivant : un pont métallique, selon qu'il est en usage depuis longtemps ou non, ne se déforme pas de la même façon sous l'influence d'une même charge.

Les travaux de M. Volterra concernant les fonctions de lignes et qui se rattachent au calcul fonctionnel ont permis de soumettre à un traitement mathématique les phénomènes mécaniques héréditaires. La détermination de ces phénomènes doit tenir compte de tous les états antérieurs du système jusqu'à un certain instant t_0 au delà duquel l'action héréditaire est négligeable. Il fallait trouver un algorithme exprimant cette action de toutes les valeurs d'une fonction le long du temps. M. Volterra a montré que selon les cas cet algorithme peut prendre, entre autres, la forme d'une équation intégrale, où la fonction inconnue figure sous le signe intégral ou bien d'une ou de plusieurs équations intégro-différentielles, dans lesquelles les dérivées de la fonction inconnue figurent également sous le signe intégral.

Mais certains auteurs et notamment M. Painlevé estiment que la non-hérédité des phénomènes mécaniques n'est qu'apparente. Si nous disposions d'ultra-microscopes très puissants, nous pourrions analyser l'état moléculaire d'un système mécanique dans ses conditions initiales et en exprimer le cycle par des équations différentielles ordinaires.

Une semblable objection suppose qu'un seul type d'explication

mécanique convient aux phénomènes de la nature; ce qu'il est téméraire d'affirmer en présence de la mécanique de la relativité d'une part et de la mécanique basée sur la statistique d'autre part. La conception de M. Volterra suppose sans doute une sorte d'action à distance dans le temps analogue à l'action des forces newtoniennes dans l'espace. Mais on peut, dans un cas comme dans l'autre, ne pas trancher métaphysiquement le problème et dire que les choses se passent comme si une telle action existait en réalité.

Quoi qu'il en soit, la conception de phénomènes mécaniques héréditaires et surtout le fait que ces derniers peuvent être interprétés mathématiquement grâce au calcul fonctionnel constitue un problème philosophique du plus haut intérêt. Non seulement cette conception s'accorde par exemple avec la théorie bergsonnienne de la durée, mais par le fait qu'elle comporte une méthode mathématique elle peut en s'appliquant aux phénomènes biologiques en suggérer une interprétation plus rigoureuse que par le passé.

Le congrès se termina par une double allocution, l'une de M. Xavier LÉON, et l'autre de M. E. BOUTROUX. Ce n'est plus à des étrangers, mais à des amis que je parle, dit M. X. LÉON et il exprime le vœu qu'un prochain congrès continue la tradition inaugurée en celui-ci. M. BOUTROUX, en des paroles élevées, rappelle la joie et les bienfaits du travail en commun, puis il termine en espérant que les congressistes étrangers garderont, comme autrefois Marie Stuart, un bon souvenir de la « douce France » où ils ont vécu quelques jours.

ARNOLD REYMOND,
Professeur à l'Université de Neuchâtel.

Fondation Henri Poincaré.

Sur l'initiative de MM. MITTAG-LEFFLER et G. DARBOUX, il vient de se constituer un Comité international comprenant les notabilités de la Science et des Lettres et portant le nom de « Comité international de la Médaille et de la Fondation Henri Poincaré ». Pour perpétuer la mémoire du grand mathématicien et pour attacher son nom à une fondation scientifique, le Comité invite les amis, les collègues et les admirateurs de Poincaré de tous les pays, à bien vouloir participer à une *souscription internationale*¹ destinée :

1° A frapper une Médaille à l'effigie de Henri Poincaré ;

¹ Une Médaille de bronze sera envoyée aux personnes dont la Souscription sera égale ou supérieure à 25 francs et inférieure à 50 francs; une Médaille d'argent sera envoyée aux personnes dont la Souscription sera égale ou supérieure à 50 francs.