I. — « Exposer, au moyen d'une méthode de critique historique, le développement organique de la théorie des fonctions elliptiques ainsi que les différents points de vue sous lesquels cette théorie a été considérée depuis la fin du XVIII^e siècle jusqu'à nos jours. Indiquer l'influence qu'ont eue, sur d'autres branches de l'Analyse, les vues qui se sont présentées successivement dans la dite théorie »[1].

II. — « Dès les premières années du XX^e siècle, il a été proposé, de différents côtés, de substituer, à la définition classique de l'intégration définie, d'autres définitions, à l'effet de généraliser la notion d'intégrale et de l'appliquer à des classes de fonctions aussi étendues que possible. »

« On propose de soumettre ces définitions à un examen historique et critique précis et de faire connaître celle des définitions étudiées que l'on adopterait soi-même, en exposant d'une façon approfondie les raisons de sa préférence. »

A celui qui, au jugement de l'Académie, aura présenté le meilleur travail sur l'un ou l'autre de ces sujets, le Chevalier Adolphe Merlani fera remettre la somme de 500 lires à titre de contribution aux frais d'exécution du travail.

La fermeture du concours aura lieu le 31 décembre 1916. Les mémoires devront être adressés, avant cette date, au Secrétaire de la Classe des Sciences physiques de l'Académie royale des Sciences de Bologne, Via Zamboni, 33. Ils devront être rédigés en italien et être inédits. Les auteurs ne mettront point leur nom au mémoire; ils indiqueront seulement une devise qu'ils reproduiront sur un pli cacheté renfermant leur nom et leur adresse.

Société mathématique suisse, réunion annuelle.
Centenaire de la Société helvétique des Sciences naturelles.

Genève, septembre 1915.

La *Société helvétique des Sciences naturelles* a célébré le centenaire de sa fondation en une série de séances qui ont eu lieu à Genève du 12 au 15 septembre 1915. Fondée dans cette ville le 6 octobre 1815, elle groupa tout d'abord les naturalistes suisses, mais elle ne tarda pas à élargir son cadre et à faire une place de plus en plus large aux sciences physiques et mathématiques. Aujourd'hui, le Sénat de la Société helvétique comprend les représentants des grandes commissions permanentes de géologie, de géodésie, des glaciers, de la publication des Œuvres d'Euler,

[1] Ce même sujet a déjà été mis au concours deux autres fois, mais aucun concurrent ne s'est présenté.

etc., ainsi que les présidents des Sociétés cantonales de Sciences naturelles et des Sociétés suisses scientifiques s'occupant d'une branche spéciale. C'est à ce dernier titre que la Société mathématique suisse se trouve rattachée à la Société helvétique depuis 1910. Le Sénat joue en quelque sorte le rôle d'une académie des sciences, tout au moins pour les relations à l'étranger; il a d'ailleurs des représentants dans l'Association internationale des Académies.

La Société helvétique des Sciences naturelles est la première institution académique nomade dont le siège se déplace chaque année. Depuis sa fondation, elle tient ses réunions annuelles successivement dans les différentes parties du pays et devient ainsi toujours plus un facteur d'union nationale. Ce type de société nomade fut imité plus tard à l'étranger (Société des médecins et naturalistes allemands, Munich, 1822 ; Association britannique pour l'avancement des sciences, York, 1831, etc.).

L'œuvre scientifique de la Société helvétique est considérable. Il suffit pour s'en rendre compte de parcourir le beau volume contenant les « Notices historiques et les documents réunis par la Commission historique instituée à l'occasion du Centenaire[1]. » Pour ce qui concerne plus particulièrement les mathématiques, nous avons à mentionner ici la commission nommée en 1909 avec la mission de publier les Œuvres complètes d'Euler. En coordonnant ainsi les efforts des savants suisses, la Société helvétique des Sciences naturelles a produit des travaux utiles à la fois à la science et au pays.

H. F.

Les séances de la *Section des sciences mathématiques et astronomiques* tenaient en même temps lieu de réunion annuelle de la *Société mathématique suisse*. Les communications ont été réparties sur deux séances qui ont eu lieu le mardi 14 septembre à l'Université.

1. — En ouvrant la première séance, M. le professeur H. Fehr, président, a rappelé qu'au moment de la fondation de la Société helvétique, la chaire de mathémathique de l'ancienne Académie était occupée par le géomètre Simon L'Huillier, puis il a indiqué, à grands traits, le rôle joué par les mathématiciens suisses du 19e siècle. Les principaux d'entre eux sont : Louis Bertrand (de Genève), 1731-1812; Simon L'Huillier, 1750-1840 ; Robert Argand, 1768-1822 ; Jacob Steiner, 1796-1863 ; Charles Sturm, 1803-1855; Ludwig Schläfli, 1814-1895 ; Gabriel Oltramare, 1816-1906 ; Ch.

[1] Centenaire de la Société helvétique des Sciences naturelles, 1 vol. in-4°, 310 p. — Georg et Cie, Bâle et Genève.

Cellérier, 1818-1889; J. Amsler-Laffon, 1823-1912; Georg Sidler, 1831-1907; Charles Ruchonnet, 1832-1914; Hermann Kinkelin, 1841-1913; Von Der Mühll, 1841-1912; Gustave Cellérier, 1855-1914; Walter Ritz, 1878-1909.

2. — M. le Prof. L.-G. Du Pasquier (Neuchâtel): *Sur les systèmes de nombres complexes.* — Soit un système de nombres complexes comprenant une infinité de « complexes » $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_r e_r = \sum_{\lambda}^{1\dots r} x_\lambda e_\lambda$, où les $x_1, x_2, \dots, x_r$ sont r nombres réels quelconques dits *coordonnées du complexe* x, et les $e_1, e_2, \dots e_\lambda, \dots, e_r$ des symboles dits *les unités relatives* du système de nombre envisagé. Supposons définies, dans ce système de nombres complexes, les opérations rationnelles de l'addition et de la multiplication, et leurs opérations inverses: la soustraction et la division. On sait qu'alors tout produit $e_i e_k$ de deux unités relatives quelconques s'exprime en fonction linéaire, à coefficients réels, des mêmes unités relatives e_λ.

Appelons *complexe rationnel* un tel nombre complexe dont toutes les r coordonnées x_λ sont des nombres rationnels quelconques, entiers ou fractionnaires. L'ensemble de tous les complexes rationnels forme alors un « domaine de rationalité » ou « *corps* de nombres complexes », c'est-à-dire que ces complexes rationnels se reproduisent par les 4 opérations de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division; en d'autres termes: la somme, la différence, le produit et le quotient (pour autant que la division est définie et possible) de deux complexes rationnels quelconques est toujours de nouveau un complexe rationnel.

Pour faire l'arithmétique de ce corps de nombres, c'est-à-dire pour ériger une théorie des nombres dans ce domaine de rationalité, il faut tout d'abord le départager en deux, mettant d'une part: les complexes rationnels « entiers », et d'autre part: les complexes rationnels « non entiers ».

La définition suivante se présente le plus naturellement à l'esprit:

Un complexe rationnel $x = \sum_{\lambda}^{1\dots r} x_\lambda e_\lambda$ est dit *entier*, si toutes ses r coordonnées sont des nombres entiers ordinaires; ce complexe x sera dit *non entier*, si l'une au moins de ses r coordonnées est un nombre fractionnaire.

Prenant pour base cette définition et envisageant les *complexes entiers* ainsi définis comme éléments (c'est-à-dire comme l'analogue des nombres *entiers* dans l'arithmétique classique), on peut ériger toute une arithmétique du système de nombres complexes considéré. Cette arithmétique généralisée présente beaucoup d'analogies avec l'arithmétique ordinaire dont les éléments sont les nombres rationnels entiers. On retrouve en général, dans cette arithmétique des complexes, l'équivalent du *nombre premier*, et la possibilité de décomposer un complexe entier quelconque en *facteurs premiers;* on y retrouve aussi les *diviseurs communs* de 2 complexes entiers donnés, ou, plus généralement, de n complexes entiers donnés ; on y retrouve encore *un algorithme* analogue à celui d'*Euclide*, permettant de déterminer, par un nombre fini d'opérations rationnelles, *le plus grand commun diviseur* de plusieurs complexes entiers donnés; on y retrouve une théorie des congruences, l'analogue du théorème de *Wilson*, l'analogue du théorème de *Fermat*, etc.

Mais il y a des cas où cette analogie ne joue pas. Il y a des systèmes de nombres où l'arithmétique généralisée basée sur la définition ci-dessus du nombre complexe *entier* présente de curieuses exceptions aux règles générales, des anomalies étonnantes et inexplicables. Cela tient à la définition même du complexe *entier*, comme l'a montré pour la première fois M. *A. Hurwitz* à Zurich, sur l'exemple des quaternions entiers.

Voici les considérations pouvant conduire à une définition satisfaisante du nombre complexe *entier :*

Les nombres entiers sont caractérisés par les propriétés fondamentales suivantes :

1° Ils doivent former *un domaine d'intégrité*, c'est-à-dire qu'ils doivent se reproduire par addition, soustraction et multiplication ; en d'autres termes: la somme, la différence et le produit de deux nombres *entiers* doit toujours être de nouveau un nombre *entier*.

2° Ce domaine d'intégrité doit contenir « le nombre 1 » et « le nombre zéro ».

3° Ce domaine d'intégrité doit posséder *une base finie;* autrement dit : il doit être possible de choisir, dans ce domaine d'intégrité, un nombre fini de complexes entiers, disons $t_1, t_2, \dots t_n$, jouissant de la propriété suivante :

Si $m_1, m_2, \dots, m_n$ désignent des nombres entiers ordinaires quelconques (positifs, nuls ou négatifs), l'expression

$$(1) \qquad m_1 t_1 + m_2 t_2 + \dots + m_n t_n$$

doit pouvoir reproduire, par un choix convenable des nombres entiers m_λ, absolument tous les éléments du domaine envisagé. Réciproquement : le domaine d'intégrité en question doit se composer de *tous* les complexes, et *uniquement* des complexes, qu'on obtient en assignant, dans l'expression (1) ci-dessus, aux nombres ordinaires $m_1, m_2, \dots m_n$, de toutes les manières possibles, des valeurs entières positives, nulles ou négatives.

Tout ensemble de complexes jouissant des trois propriétés ci-dessus est appelé *un domaine holoïde.*

En vertu de cette définition, tout domaine holoïde contient une infinité d'éléments, parmi lesquels « le nombre 1 » et « le nombre zéro » ; de plus, on peut y effectuer sans restriction l'addition, la soustraction et la multiplication, et cela sans jamais sortir du domaine; enfin, il possède une base finie.

Or, pour caractériser les nombres entiers, il faut une quatrième propriété :

4° Ils doivent constituer un domaine holoïde qui soit *maximal.*

Définition : un domaine holoïde [H] est dit *maximal,* lorsqu'il n'existe pas, dans le corps de nombres envisagé, un autre domaine holoïde contenant *tous* les éléments de [H], plus encore d'autres éléments non contenus dans [H].

La définition du complexe rationnel « entier » est alors la suivante : un complexe rationnel $x = \sum\limits_{\lambda}^{1\dots r} x_\lambda e_\lambda$ est dit *entier,* s'il fait partie du domaine holoïde maximal en question; le complexe rationnel x sera dit *non entier,* s'il n'est pas contenu dans ce domaine holoïde maximal.

Adoptant cette définition et envisageant comme éléments les complexes « entiers » définis de *cette* façon, on peut construire, dans le domaine des nombres complexes entiers ainsi délimité, toute une arithmétique et toute une théorie des nombres, d'une simplicité analogue à celle de l'arithmétique ordinaire et de la théorie des nombres classique.

En prenant, comme exemples particuliers, différents systèmes de nombres complexes, l'orateur montre ce qui suit :

1° Cette définition du nombre complexe *entier* peut avoir comme conséquence qu'on appellera « entiers » même certains complexes rationnels x à coordonnées x_λ fractionnaires; il peut arriver aussi que certains complexes rationnels x ne soient pas des complexes « entiers », bien que toutes leurs coordonnées x_λ soient des nombres entiers ordinaires.

2° L'opération consistant à partager le corps de nombres envisagé en deux domaines, mettant d'un côté : les complexes *entiers,* de l'autre : les complexes *non entiers,* cette opération peut ne pas être univoque. Il existe, en effet, des systèmes de nombres complexes tels que le corps constitué par l'ensemble de tous les complexes rationnels contient *plusieurs* domaines holoïdes *maximaux,* très différents entre eux.

3° Etant donné un corps de complexes rationnels faisant partie d'un système déterminé de nombres complexes, il peut même arriver que ce corps de nombres ne contienne *aucun* domaine holoïde maximal. L'auteur cite, à titre d'exemple, un système de nombres complexes à trois coordonnées doué de cette curieuse particularité que, dans ce système, le corps des complexes rationnels ne contient aucun domaine holoïde maximal.

Si l'on fait alors l'arithmétique d'un domaine holoïde *non* maximal, on rencontre dans les théorèmes de divisibilité, dans la théorie du plus grand commun diviseur, etc., des exceptions curieuses, des anomalies surprenantes.

Ces anomalies-là ne se présentent pas, quand l'ensemble des complexes rationnels *entiers* constitue un domaine holoïde maximal.

Discussion : M. Speiser, Mme Young et M. Du Pasquier.

3. — M. le Dr G. Pólya (Zurich). *Une série de puissances est-elle en général non-continuable ?* — On parle en mathématique de « cas général » dans les cas suivants : lorsque l'ensemble des cas d'exception est :

1. de mesure nulle, ou bien
2. de dimension inférieure, ou bien
3. de puissance inférieure à celle de l'ensemble des cas réguliers. — L'ensemble des séries de puissances continuables et celui des séries de puissances non-continuables ont tous deux la même puissance, celle du continu. Les notions de mesure ou de dimension n'ont pas encore été définies dans l'espace, dont les éléments représentent les séries de puissances ; dans tous les cas, les raisonnements de MM. Borel et Fabry ne s'appuient sur aucune définition explicite de ces notions. Ces raisonnements donc, bien qu'ils nous fournissent des vues intéressantes sur la nature des séries de puissances, ne peuvent pas être considérés comme la stricte démonstration, que les séries de puissances ne sont en général pas continuables.

On fait bien d'envisager la question d'une façon différente. Dans l'espace d'une infinité de dimensions dont les points sont les séries de puissances convergentes dans le cercle de rayon un, on peut définir convenablement certaines notions relatives aux ensembles et démontrer le théorème suivant :

L'ensemble des séries de puissances non-continuables n'a que des points intérieurs et il est partout dense. L'ensemble des séries de puissances continuables est parfait et nulle part dense.

Ce théorème *peut* être démontré, car les notions de point intérieur, d'ensemble parfait, partout ou nulle part dense, qui interviennent dans l'énoncé, ont été définies avec précision. Toutes ces notions reposent sur celle de voisinage. Le *voisinage complet* $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots \varepsilon_n, \dots)$ du point $a_0, a_1, \dots a_n, \dots$ consiste dans l'ensemble des points $u_0, u_1, \dots u_n, \dots$ satisfaisant aux inégalités

$$| u_0 - a_0 | \leqq \varepsilon_0 , \quad | u_1 - a_1 | \leqq \varepsilon_1 , \dots \quad | u_n - a_n | \leqq \varepsilon_n , \dots$$

où l'on a

$$\varepsilon_n \geqq 0 , \qquad \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\varepsilon_n} = 1 .$$

Si la série $\Sigma (u_n - a_n) x^n$ converge dans un cercle de rayon plus grand que 1, le point $u_0, u_1, \dots u_n, \dots$ appartient au *voisinage immédiat* du point $a_0, a_1, \dots a_n, \dots$. J'appelle $a_0, a_1, \dots a_n, \dots$ *point limite* de l'ensemble E, lorsque dans un voisinage complet arbitraire du point $a_0, a_1, \dots a_n, \dots$ on peut trouver un point, qui appartienne à l'ensemble E, mais non au voisinage immédiat du point $a_0, a_1, \dots a_n, \dots$.

C'est avec cette notion du point limite qu'on démontre le théorème énoncé [1].

Discussion : M^me^ Young, M. G. Dumas, M. Plancherel.

4. — M. le Prof. D^r^ M. Plancherel (Fribourg), *Sur la convergence d'une classe remarquable d'intégrales définies.* — Prenons comme champ fonctionnel Ω l'ensemble des fonctions $f(x)$, définies dans l'intervalle $(0, \infty)$ et de carré intégrable (au sens de Lebesgue) dans cet intervalle, c'est-à-dire telles que $\int_0^\infty f^2 dx$ soit finie. Considérons une transformation T faisant correspondre à toute fonction f du champ Ω une fonction $T(f)$ du *même* champ. Nous caractériserons cette transformation par les propriétés suivantes

a) *linéarité*

$$T(f_1 + f_2) = T(f_1) + T(f_2)$$

$$T(kf) = kT(f) , \qquad k \text{ constante.}$$

b) *involution*

$$TT(f) = f .$$

c) *limitation.* Il existe une constante M telle que

$$\int_0^\infty [T(f)]^2 dx \leqq M^2 \int_0^\infty f^2 dx .$$

Une transformation vérifiant ces conditions sera dite une transformation fonctionnelle *linéaire, involutive et bornée.* Il existe

[1] Le mémoire paraîtra dans les *Acta Mathematica.*

alors une fonction *génératrice* $\Phi(x, y)$ permettant d'exprimer $\mathrm{T}(f)$ presque partout par la formule

$$\mathrm{T}(f) = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty f(y)\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x, y)\,dy .$$

Dans le cas où

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = \varphi(x, y)$$

existe presque partout et où l'on a

$$\int_0^x\int_0^y \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\,dx\,dy = \Phi(x, y) - \Phi(x, 0) - \Phi(0, y) + \Phi(0, 0)$$

elle peut s'écrire

$$\mathrm{T}(f) = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \left\{ f(y)\int_0^x \varphi(t, y)\,dt \right\} dy .$$

Dans ce cas $\varphi(x, y)$ est le *noyau* de la transformation T.

En général, il n'est pas permis de permuter les deux intégrations successives de la dernière formule et d'écrire

$$\mathrm{T}(f) = \int_0^\infty f(y)\varphi(x, y)\,dy .$$

Par contre, il est toujours possible de déterminer une suite de constantes $\alpha_n \to \infty$ telles que

$$\mathrm{T}(f) = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\alpha_n} f(y)\varphi(x, y)\,dy$$

presque partout. La suite α_n dépend en général de la fonction f et varie avec elle. Il est, par suite, naturel de se demander quelle hypothèse sur la fonction f permettrait de se débarrasser de la suite particulière α_n et d'assurer la convergence presque partout de $\lim\limits_{z\to\infty}\int_0^z f(y)\,\varphi(x, y)\,dy$. J'ai montré dans les *Rendiconti di Palermo*, tome 30, qu'il suffisait pour cela de supposer que $\int_0^\infty f^2(x)\sqrt[3]{x}\,dx$ existe. En transposant aux « représentations intégrales » la méthode que j'ai employée pour étudier la convergence des séries de fonctions orthogonales, j'obtiens une hypothèse plus large et je démontre le théorème suivant :

Soit $\varphi(x, y)$ *le noyau d'une transformation fonctionnelle* T *linéaire, involutive bornée dans le champ des fonctions de carré intégrable dans l'intervalle* $(0, \infty)$. *Pour toute fonction* $f(x)$ *de ce champ, telle que* $\int\limits_1^\infty f^2(x) \log^3 x \, dx$ *soit finie, la limite*

$$\lim_{z \to \infty} \int\limits_0^z f(y) \varphi(x, y) dy$$

existe presque partout et elle représente la transformée $T(f)$ *de* f.

5. — M. le Prof. W. H. Young (Genève). *Sur l'intégration par rapport à une fonction à variation bornée.* — Dans le rapport que cet auteur a donné lui-même à la Société mathématique suisse, il n'a pas abordé la partie du sujet qui se rapporte à la recherche de la fonction primitive. Récemment il a obtenu la généralisation parfaite des théorèmes de M. Lebesgue et de lui-même sur ce sujet. Les démonstrations sont fort simples. On peut en effet employer la méthode de M. de la Vallée-Poussin. Les « fonctions majorantes et minorantes » introduites par celui-ci rentrent en effet d'une manière tout à fait naturelle dans le cadre de la théorie de M. Young.

Désignant par $g(x)$ une fonction croissante, on aura à considérer non seulement des intégrales et des fonctions sommables par rapport à $g(x)$ mais aussi des nombres dérivés par rapport à $g(x)$; la mesure d'un ensemble deviendra la variation de $g(x)$ par rapport à cet ensemble, et, dans le cas où cette variation est nulle, on dira que l'ensemble complémentaire existe *presque partout par rapport à* $g(x)$. Pour éviter des répétitions ennuyeuses on peut omettre l'expression « par rapport à $g(x)$ » dans les énoncés. On aura alors cinq théorèmes principaux :

1° *S'il existe une fonction* $f(x)$ *intermédiaire (au sens large) entre les deux nombres dérivés à droite d'une fonction continue* $F(x)$, *et si* $f(x)$ *est sommable, ou bien*

i) $f(x)$ *est infini* ($+\infty$ *ou* $-\infty$) *dans tous les points d'un ensemble ayant la puissance du continu, ou bien*

$$ii) \quad F(x) - F(a) = \int\limits_a^x f(x) \, dg(x) \; .$$

En particulier, par conséquent, si $F(x)$ *a un nombre dérivé* Λ *sommable et fini sauf peut-être dans un ensemble dénombrable de* *points, on aura*

$$F(x) - F(a) = \int_a^x \Lambda \, dg(x) .$$

2° *L'intégrale indéfinie d'une fonction sommable* f(x) *a* f(x) *pour dérivée presque partout.*

3° *Si la fonction* F(x), *continue ou discontinue, est non-décroissante dans un intervalle* (a, b), *l'un quelconque $\mathcal{A}$ de ses nombres dérivés est sommable dans cet intervalle et l'on a*

$$\int_a^x \mathcal{A} \, dg(x) = F(b) - F(a) - \textit{une fonction positive non-décroissante.}$$

4° *Une fonction à variation bornée, continue ou discontinue, a une dérivée presque partout, et les nombres dérivés de la fonction sont sommables.*

5° *Une fonction* F(x) *continue et à variation bornée, dont l'un des nombres dérivés est fini, sauf peut-être dans les points d'un ensemble n'ayant pas la puissance du continu est l'intégrale indéfinie de ce nombre dérivé.*

Le premier de ces théorèmes est moins général que le théorème suivant obtenu par M. Young :

Si F(x) *est une fonction semi-continue inférieurement à droite et supérieurement à gauche, et si elle possède un nombre dérivé à droite (gauche)* f(x) *par rapport à* g(x), *sommable par rapport à* g(x) *sur l'ensemble* S *des points où* f(x) $>$ 0, *on a les deux possibilités :*

1° f(x) $= -\infty$ *dans les points d'un ensemble de puissance* c ;

2° F(x) *est une semi-intégrale supérieure par rapport à* g(x), *en effet*

$$F(x) - F(a) = \int_S f(x) \, dg(x) + \textit{une fonction positive non-décroissante.}$$

Pour obtenir ces généralisations il était nécessaire d'élaborer la théorie des nombres dérivés par rapport à $g(x)$ d'une fonction F (x) qui est au moins d'un côté semi-continue. De telles fonctions ont fait leur apparition à plusieurs reprises dans les recherches de M. Young, et les théorèmes qu'il obtient maintenant montrent de nouveau l'intérêt de ces fonctions. Il obtient entre autres un théorème du genre du théorème de Dini, et qui contient ce dernier comme cas spécial :

Si F (x) *est semi-continue supérieurement à droite dans un intervalle* (a, b), *les bornes supérieures des nombres dérivés à gauche sont toutes les mêmes et coïncident avec la borne supérieure du rapport incrémental, les nombres dérivés et le rapport incrémental étant pris par rapport à* x *ou* g(x), *pourvu que* i) g(x) *soit continue* *à droite, ou* ii) F(x) *n'est pas monotone et non-croissant partout dans l'intervalle.*

Discussion : M. PLANCHEREL.

6. — M^{me} Grace Chisholm YOUNG (Genève). *Sur les courbes sans tangente.* — Weierstrass a démontré que la fonction continue représentée par la série de Fourier $\sum_{n=0} b^n \cos a^n x\pi$ n'a pas de dérivée. La question se pose : est-ce que la courbe $y = f(x)$, où $f(x)$ est la fonction de Weierstrass, n'a pas de tangente ? Pour ceci il ne suffit pas que la fonction n'ait pas de dérivée, car si elle avait une dérivée à droite et une dérivée à gauche, toutes les deux infinies mais avec des signes opposés, la courbe aurait une tangente singulière, dont le point d'incidence serait un point de rebroussement de la courbe. D'après un théorème connu, ceci ne peut avoir lieu que dans un ensemble dénombrable de points. On verra qu'en effet il y a de tels points de rebroussement sur la courbe de Weierstrass, mais que, sauf dans un ensemble de première catégorie et de mesure nulle, chaque ligne passant par un point P de la courbe a un caractère tangentiel pour la courbe dans le point P considéré.

Discussion : M. C. CAILLER, M. Raoul PICTET.

7. — M. le D^r D. MIRIMANOFF (Genève) et M^{me} Grace Chisholm YOUNG. *Sur le théorème des tuiles.* — Une tuile d'après W. H. Young, l'auteur du théorème, est un élément de forme et grandeur déterminées autour d'un point spécial dit point d'attachement. L'énoncé est le suivant : *Etant donné un ensemble de tuiles sur une droite, dont chacune peut être taillée autant que l'on veut, on peut trouver un nombre fini ou une infinité dénombrable de tuiles, ayant les propriétés suivantes :*

1° *la largeur de chaque tuile est plus petit que* e ;

2° *chaque point d'attachement est couvert par au moins une des tuiles ;*

3° *le point d'attachement* $\mathrm{P_i}$ *de la tuile* $d_{\mathrm{P_i}}$ *n'est pas couvert par une autre tuile ;*

4° *la somme des largeurs des tuiles diffère de la mesure* m(S) *de l'ensemble* S *des points d'attachement de moins* e'.

Ici e *et* e' *sont des quantités positives choisies.*

Si l'ensemble est fermé, les tuiles peuvent être trouvées en nombre fini.

La démonstration présentée est une élaboration par D. Mirimanoff de celle donnée par l'auteur sous une forme incomplète.

8. — M. le Prof. L. CRELIER (Berne-Bienne). *Sur un théorème particulier de géométrie cinématique et quelques constructions de tangentes liées à ce théorème*[1]. — Les résultats généraux de la géométrie cinématique peuvent être appliqués avec succès à un très grand nombre de mécanismes particuliers et conduire ainsi à une foule de résultats de détail originaux et forts intéressants.

Considérons en particulier le mécanisme bien connu « Bielle-Manivelle ». La manivelle étant OB et la bielle AB. Nous prendrons le chemin de la bielle suivant le diamètre OA et nous le considérerons comme axe des x. L'origine sera le centre O.

Nous avons,

$$\begin{aligned}
&\text{pour la base :} && (x^2 + y^2)(l^2 - R^2 - x^2)^2 = 4R^2x^4\\
&\text{pour la roulante :} && R^2(x^2 + y^2 - lx)^2 = l^2x^2(y^2 + (x - l)^2)\\
&\text{pour la courbe } C_d: && (x^2 - l^2)(x^2 + y^2) + R^2y^2 = 0.
\end{aligned}$$

Cette dernière courbe est une conchoïde de la base par rapport au centre O et dont la constante est $R = OB$.

TANGENTES. — 1. *De la roulante.* Il suffit de rappeler que celle-ci est une conchoïde de conique par rapport à un foyer. La constante de la conique est $2R$ et celle de la conchoïde $-R$. Soit M un tel point de la roulante; F_2M est prolongé jusqu'en a avec $Ma = R$; a est le point de la conique. Nous construisons la normale en a au moyen du cercle directeur et du cercle principal; nous obtenons aJ. En F_2, nous faisons F_2J perpendiculaire à F_2M; c'est la normale de l'enveloppe de la droite mobile pour la position correspondante, et de cette manière J est le centre instantané nécessaire. Nous en déduisons *a priori* la tangente et la normale en M.

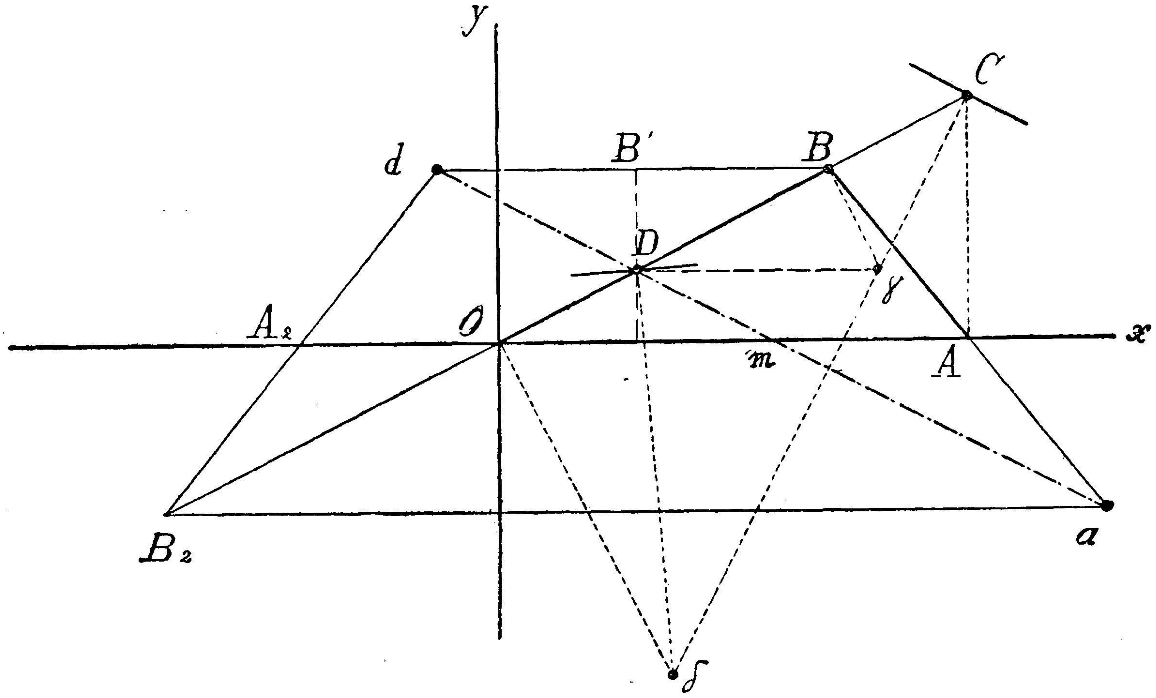
2. *De la base.* Soit C le point de la base pour la position considérée OBA. Nous porterons $Aa = AB = l$ sur le prolongement de la bielle AB et opposé à B, puis $OB_2 = OB = R$ sur le prolongement correspondant de la manivelle OB. Nous aurons B_2a parallèle à Ox. Soit maintenant BaB_2d le trapèze isocèle sur la base B_2a et la diagonale B_2B. Il en résulte $B_2B = ad = 2R$, et $B_2O = OB = am = md = R$. En désignant le point de coupe des diagonales par D, nous aurons encore $Dd = DB$ et $aD + DB = 2R$.

De cette manière D est un point de la conique (ellipse) de foyers a et B et de constante 2R. Nous avons également, avec DB' perpendiculaire à dB, $dB' = B'B$ puis $AB' = R$ et $OB' = l$; dans ces conditions D est encore un point de la courbe C_d, et nous en tirons $DC = R$.

Examinons maintenant la tangente en C. La théorie des mouvements épicycloïdaux nous enseigne que la base et la position

[1] Voir L. CRELIER, *Systèmes cinématiques* (collections *Scientia*), Gauthier-Villars, Paris. Chapitres VI et IV.

correspondante de la roulante pour le point C ont la même tangente en C. En outre cette roulante correspond à la conique de foyers a et B et de constante 2R. Nous appliquons maintenant la construction de la tangente de la roulante. Nous savons déjà que le point nécessaire de la conique est D et nous pourrions encore l'obtenir en portant R depuis C sur OB. La tangente de la conique en D est évidemment DB$'$, perpendiculaire à l'axe des x, donc la



normale est une parallèle Dγ à ce même axe. D'autre part la normale de l'enveloppe du segment mobile OB dans la génération de la roulante est une perpendiculaire Bγ à OB. Nous trouvons alors le centre instantané γ, relatif à notre conchoïde de conique.

Il est maintenant facile de tracer la normale et la tangente cherchée en C.

3. *De la courbe* C_d. Comme celle-ci est une conchoïde de la base, nous utiliserons la normale de la base en C et la normale de l'enveloppe du segment mobile OB autour de O; cette dernière est Oδ perpendiculaire à OB. Le point δ est ainsi le nouveau centre instantané de rotation et nous en déduisons sans autre la normale, puis la tangente en D.

Trajectoires de a et d. — Nous savons que a est un point fixe de la bielle avec BA $=$ Aa $= l$. Sa trajectoire est une roulette du mécanisme considéré. L'équation de cette courbe s'appelle :

$$(x^2 - R^2 - 4l^2 + 5y^2)^2 = 16(R^2 - y^2)(l^2 - y^2) .$$

Nous devons observer en plus que le mécanisme OBA et le mécanisme symétrique travaillant à gauche de l'axe des y ont la même base, et la même courbe C_d. Comme nous avons aussi $B_2A_2 = l$,

OB_2A_2 est une des positions de ce mécanisme symétrique. Avec $A_2d = l$, la trajectoire de d est une roulette analogue à celle décrite par a. En établissant son équation, nous trouvons le même résultat que pour le chemin de a; en conséquence les points a et d se déplacent sur la même courbe.

Si nous considérons plus spécialement la diagonale ad dont les extrémités s'appuient sur la trajectoire (a) ou (d), nous avons là une droite de longueur fixe, double de la manivelle, disposée symétriquement par rapport à celle-ci et passant toujours par le point correspondant D de la courbe C_d. Cette droite donne lieu au théorème suivant :

THÉORÈME : *Dans le mouvement du mécanisme « Bielle-Manivelle », il existe une droite mobile de longueur fixe* 2R, *symétrique avec le rayon* OB, *passant toujours par le point correspondant* D *et telle que son milieu* m *glisse sur l'axe des* x *pendant que ses extrémités s'appuient sur la trajectoire* (a) *d'un point* a *de la bielle, avec* Aa $=$ l

ou en d'autres termes :

Les cordes de la trajectoire (a) *symétriques des rayons* OB *et menées par les divers points* D *correspondants, sont de longueur fixe* 2R *et elles sont divisées en deux parties égales par l'axe des* x.

9. — M. le Dr René de SAUSSURE (Berne et Genève), *La Géométrie des feuillets cotés.* — M. René de Saussure, poursuivant l'étude de la géométrie dite des « feuillets », expose un développement récent de cette géométrie obtenu en introduisant la notion du « feuillet coté ». Les résultats de cette étude ont été exposés dans les *Arch. des Sc. Phys. et Nat.* de Genève (1915). Rappelons seulement que le « feuillet » n'est pas autre chose qu'un corps rigide quelconque, considéré non pas en sa forme ou en sa grandeur, mais seulement comme *position*. C'est cette position qui est prise comme élément spatial primitif, donnant lieu à une nouvelle géométrie de caractère quadratique et à 6 dimensions (quoique située dans notre espace à 3 dimensions). En affectant chaque feuillet d'un coefficient numérique, appelé *cote*, on obtient le feuillet « coté », qui donne lieu à une géométrie à 7 dimensions (toujours située dans notre espace) et dont le caractère n'est plus quadratique mais linéaire. Les formes fondamentales de cette géométrie ont reçu de l'auteur les noms de : *mono-*, *bi-*, *tri-*, *tétra-*, *penta-*, et *hexacouronne*.

L'hexacouronne est le lieu des feuillets cotés (en nombre ∞^6) qui satisfont à l'équation :

$$f + \varphi = h \operatorname{tang} \frac{\omega}{2}$$

f étant la cote d'un feuillet fixe F (appelé feuillet *central*); φ, la cote du feuillet mobile Φ qui engendre l'hexacouronne; enfin h et ω, la translation et la rotation du mouvement hélicoïdal qui permet de passer de la position fixe F à la position Φ.

Toutes les autres polycouronnes peuvent être définies comme l'ensemble des feuillets cotés communs à 2, 3, 4, 5 ou 6 hexacouronnes. Finalement: 7 hexacouronnes ont en commun un feuillet coté et un seul. De sorte que réciproquement: 7 feuillets cotés déterminent une hexacouronne, 6 feuillets une pentacouronne, etc., 2 feuillets une monocouronne.

10. — M. le Prof. C. Cailler (Genève). *Sur la théorie analytique des corps cotés.* — M. C. Cailler présente quelques développements sur les principes analytiques de la théorie des *corps solides cotés* ou *feuillets cotés,* due essentiellement à M. de Saussure, qui l'a étudiée surtout par la voie géométrique. C'est M. E. Study qui, le premier, a représenté par des coordonnées d'un emploi commode les positions d'un solide dans l'espace. Rappelons la formation de ces coordonnées où intervient la notion de biquaternion qui remonte à Cayley et Clifford.

Soient i_1, i_2, i_3 les unités quaternionniennes, i une nouvelle unité complexe permutable avec les précédentes et telle que $i^2 = 0$. Un corps solide congruent à un système d'axes coordonnés est équivalent à un mouvement de ce dernier; à son tour le mouvement se ramène à une rotation, dont les constantes de Rodrigues sont e_0, e_1, e_2, e_3, combinée avec une translation de composantes a_1, a_2, a_3. Les 8 coordonnées homogènes du corps $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{A}'_k \\ \mathfrak{A}''_k\end{matrix}\right\}$ seront, selon M. Study, les suivantes :

$$\mathfrak{A}'_0 = e_0 \,, \qquad \mathfrak{A}''_0 = -\frac{1}{2}(e_1 a_1 + e_2 a_2 + e_3 a_3) \,,$$

$$\mathfrak{A}'_1 = e_1 \,, \qquad \mathfrak{A}''_1 = +\frac{1}{2}(e_0 a_1 + e_3 a_2 - e_2 a_3) \,,$$

$$\mathfrak{A}'_2 = e_2 \,, \qquad \mathfrak{A}''_2 = +\frac{1}{2}(e_0 a_2 + e_1 a_3 - e_3 a_1) \,,$$

$$\mathfrak{A}'_3 = e_3 \,, \qquad \mathfrak{A}''_3 = +\frac{1}{2}(e_0 a_3 + e_2 a_1 - e_1 a_2) \,;$$

elles vérifient les conditions $\sum_{(k)} \mathfrak{A}'^2_k = 1$, $\sum_{(k)} \mathfrak{A}'_k \mathfrak{A}''_k = 0$, de sorte que le corps occupe dans l'espace ∞^6 positions comme il convient.

Désignons par un accent la partie réelle d'une quantité complexe, par deux accents la partie imaginaire de cette même quantité, et posons

$$\mathfrak{A}_k = \mathfrak{A}'_k + i\mathfrak{A}''_k \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + i_1\mathfrak{A}_1 + i_2\mathfrak{A}_2 + i_3\mathfrak{A}_3$$

le biquaternion $\mathfrak{A}$ ainsi formé représente analytiquement le corps ou le mouvement donné. On montre que si $\overline{\mathfrak{A}}$ est le conjugué de $\mathfrak{A}$ obtenu en changeant dans $\mathfrak{A}$ le signe des quatre quantités i, le déplacement d'un point solidaire du corps mobile est représenté par la formule quaternionnienne

$$\sigma' = \mathfrak{A}\sigma\overline{\mathfrak{A}}$$

dans laquelle

$$\sigma = 1 + i(i_1x_1 + i_2x_2 + i_3x_3)\ , \qquad \sigma' = 1 + i(i_1x'_1 + i_2x'_2 + i_3x'_3)\ ,$$

x_k et x'_k désignant les coordonnées du point avant et après le mouvement.

Pour s'élever à la conception du corps coté, il suffit de remarquer que la formule précédente ne change pas quand on multiplie $\mathfrak{A}$ par le facteur scalaire $(1 + \omega i)$, et partant, $\overline{\mathfrak{A}}$ par le facteur conjugué $1 - i\omega$; en effet, le produit des facteurs ainsi introduits vaut $1 - i^2\omega^2 = 1$.

La quantité arbitraire ω prendra le nom de *cote* du corps; le corps coté aura pour représentant analytique un biquaternion

$$\alpha = (1 + \omega i)\,\mathfrak{A} = \alpha_0 + i_1\alpha_1 + i_2\alpha_2 + i_3\alpha_3 = (\alpha'_0 + i\alpha''_0) + i_1(\alpha'_1 + i\alpha''_1) + \dots\ ;$$

de là résultent pour les 2 coordonnées $\left\{\begin{matrix}\alpha'_k\\ \alpha''_k\end{matrix}\right\}$ du corps coté les valeurs

$$\alpha'_k = e_k\ , \qquad \alpha''_k = \omega e_k + \mathfrak{A}''_k\ ; \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

lesquelles satisfont les équations

$$(\alpha\alpha)' = \alpha'^2_0 + \alpha'^2_1 + \alpha'^2_2 + \alpha'^2_3 = 1\ ,$$

$$\frac{1}{2}(\alpha\alpha)'' = \alpha'_0\alpha''_0 + \alpha'_1\alpha''_1 + \alpha'_2\alpha''_2 + \alpha'_3\alpha''_3 = \omega\ .$$

De la sorte, un corps et une cote déterminent ensemble, au signe près, le tableau $\left\{\begin{matrix}\alpha'_k\\ \alpha''_k\end{matrix}\right\}$; réciproquement 8 nombres quelconques α_k définissent, d'une manière unique, un corps coté, pourvu que ces nombres vérifient la condition $(\alpha\alpha)' = 1$.

Il est d'ailleurs aisé d'assigner la signification géométrique des coordonnées $\left\{\begin{matrix}\alpha'_k \\ \alpha''_k\end{matrix}\right\}$, en la faisant dériver de celle des invariants $(\alpha\beta)'$ et $(\alpha\beta)''$ de deux corps α et β, de cotes ω_α et ω_β. Si a et b désignent l'angle de rotation et le glissement du mouvement hélicoïdal conduisant un de ces corps sur l'autre, on trouve facilement

$$(\alpha\beta)' = \sum_k \alpha'_k \beta'_k = \cos\frac{a}{2}\,,$$

$$(\alpha\beta)'' = \sum_k (\alpha'_k\beta''_k + \alpha''_k\beta'_k) = (\omega_\alpha + \omega_\beta)\cos\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\sin\frac{a}{2}\,.$$

Ce dernier invariant qu'on peut nommer le *moment relatif* des deux corps joue le rôle principal dans l'étude des polyséries linéaires de corps cotés. M. de Saussure a donné la théorie géométrique de ces polyséries et les a désignées sous le nom générique de *polycouronnes;* elles sont semblables aux *systèmes de vis* de Ball. L'emploi des coordonnées $\left\{\begin{matrix}\alpha'_k \\ \alpha''_k\end{matrix}\right\}$ permet de présenter d'une manière très claire l'ensemble de ces résultats.

M. Cailler termine sa communication en insistant sur les analogies que présente, avec les théories de la Statique ordinaire, celle des corps non cotés mais doués d'une *masse* ou d'une *intensité* a. Ce sont les corps $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{A}'_k \\ \mathfrak{A}''_k\end{matrix}\right\}$ vérifiant la condition $\sum_k \mathfrak{A}'_k \mathfrak{A}''_k = 0$ mais donnant $\sum_k \mathfrak{A}'^2_k = a^2$, au lieu de $\sum_k \mathfrak{A}'^2_k = 1$.

Un système de corps massifs $(\mathfrak{A}, a)$, $(\mathfrak{B}, b)$, $(\mathfrak{C}, c)$ ... est toujours équivalent à un corps coté α: deux systèmes $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$, équivalents au même corps côté α, sont réductibles l'un à l'autre par une opération toute semblable à la composition des vecteurs concourants. Ainsi se trouve fermé le cycle des comparaisons entre la Géométrie réglée d'une part et celle des corps cotés de l'autre.

11. — M. le Dr H. Berliner (Berne), *Une nouvelle géométrie projective analytique.* — *Dans le plan:* Ayant fixé un triangle ABC et 3 nombres $z_1 z_2 z_3$, nous attribuons dans le faisceau autour d'un point P — ou dans la ponctuelle sur une droite g; aux 3 rayons PA, PB, PC — respectivement aux 3 points gBC, gCA, gAB ou bien les nombres $z_1 z_2 z_3$ eux-mêmes comme *abscisses,* ou bien (ayant fixé un angle unité) les angles $z_1 z_2 z_3$ comme *coordonnées angulaires.* (Voir: Berliner *Involutionssysteme in der Ebene des Dreiecks,* Braunschweig 1914, No. 26). Un élément génétique s

aura l'abscisse z ou la coordonnée angulaire w déterminées respectivement par les conditions :

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z - z_1}{z - z_2} = (\text{PA, PB, PC, S}) \text{ resp. } = (g\text{BC}, g\text{CA}, g\text{AB, S})$$

(Cf. v. Staudt, *Beiträge z. Geom. der Lage,* § 29).
ou bien :

$$\frac{tgz_3 - tgz_1}{tgz_3 - tgz_2} : \frac{tgw - tgz_1}{tgw - tgz_2} = (\text{PA, PB, PC, S}) \text{ resp. } = (g\text{BC}, g\text{CA}, g\text{AB, S}).$$

Toute forme fondamentale de premier rang possède ainsi un système d'abscisses et de coordonnées angulaires. Si P est sur g ; si x est l'abscisse ou la coordonnée angulaire de P dans le système correspondant à g, et si y est l'abscisse ou la coordonnée angulaire de g dans le système correspondant à P, x égale y. On peut aussi parler de *l'abscisse ou de la coordonnée angulaire d'un point sur une courbe:* on entendra *les coordonnées qui sont attribuées à* P *dans le système de la tangente en ce point.*

Les systèmes d'abscisses ou de coordonnées angulaires conduisent à plusieurs systèmes de coordonnées ponctuelles ou tangentielles dans le plan. Nous n'en citons qu'un.

Si l'on fixe un point D, non situé sur un côté du triangle, un second poit P détermine alors univoquement 2 coordonnées angulaires. φ et ψ, en général : ce sont la coordonnée angulaire φ de DP, dans le système correspondant à D, et la coordonnée angulaire ψ de P, dans le système de DP. Nous nommons φ et ψ la *1re et la 2e coordonnées* de P. On pourrait semblablement employer des systèmes d'abscisses.

Les systèmes d'abscisses et de coordonnée angulaire conduisent chacun à une géométrie métrique. Nous définissons la *distance* de 2 points par la *différence des abscisses ou des coordonnées angulaires* dans le système correspondant à la droite de jonction, et *l'angle* de 2 droites par *différence des abscisses ou des coordonnées angulaires des droites,* dans le système de leur point d'intersection. La distance et l'angle ont ainsi un signe déterminé. Le cercle est une C^3, et par tout point on peut mener 3 parallèles à une droite g, si (par définition) l'angle de g et de ses parallèles est *nul.*

Dans l'espace : Ayant fixé un tétraèdre ABCD (BCD $\equiv \alpha$, CDA $\equiv \beta$, DAB $\equiv \gamma$, ABC $\equiv \delta$) et 3 nombres $z_1 z_2 z_3$, nous attribuons — dans la ponctuelle sur une droite g arbitraire aux 3 points $g\alpha$, $g\beta$, $g\gamma$ — dans le faisceau de plans autour de g aux 3 plans gA, gB, gC — dans le faisceau de droites par un point P, dans un plan ε ou bien (1re manière) aux 3 rayons (P, εBC) (P, εCA) (P, εAB) ou bien (2e manière) (P, $\varepsilon\beta\gamma$), (P, $\varepsilon\gamma\alpha$), (P, $\varepsilon\alpha\beta$) — les 3 nombres $z_1 z_2 z_3$

comme abscisses et déterminons comme plus haut l'abscisse de l'élément générique. On pourrait employer de façon analogue les coordonnées angulaires.

De cette façon, à chaque forme fondamentale de 1er rang correspondent un (respectivement deux) système d'abscisse, et un (respectivement deux) système de coordonnées angulaires. De plus, à chaque forme fondamentale de second rang, dont le support est un point P, ou un plan ε, le tétraèdre ABCD fait correspondre un système de coordonnées dans lequel le trièdre fondamental P(ABC), le rayon PD et le plan polaire de PD suivant P(ABC), ou bien le triangle fondamental $\varepsilon(\alpha\beta\gamma)$, la droite $\varepsilon\delta$ et le pôle de $\varepsilon\delta$ suivant $\varepsilon(\alpha\beta\gamma)$ jouent le rôle de base, et où l'on emploiera comme coordonnées les abscisses de la première ou de la seconde manière. Si P et ε sont incidents, si xy sont les 1re et 2e coordonnées de P, dans le système correspondant à ε, et ξ, η celles de ε, dans le système correspondant à P (comme centre d'une gerbe de droites) on a

$$x = \xi \quad \text{et} \quad y = \eta \, .$$

Par 1re et 2e coordonnées *d'un point sur une surface* (d'une tangente, d'un point tangent) on comprendra *celles du point dans le système de son plan tangent.*

Les systèmes d'abscisses — ou de coordonnées angulaires — ou de 1re et 2e coordonnées des formes fondamentales de 1er et de 2e rang conduisent à plusieurs systèmes de coordonnées ponctuels linéaires ou tangentiels de l'espace. Nous ne citons que le suivant. Si nous fixons un point ε non situé sur une des faces du tétraèdre, un point P détermine 3 coordonnées angulaires $\varphi_1\, \varphi_2\, \varphi_3$; ce sont la 1re et 2e coordonnée angulaire $\varphi_1\, \varphi_2$ de εP dans le système correspondant à ε, et la coordonnée angulaire φ_3 de P dans le système correspondant à la ponctuelle εP. En outre une droite g détermine 4 coordonnées angulaires ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 qui sont les 1re et 2e coordonnées angulaires du plan εg dans le système correspondant à ε, et les 1re et 2e coordonnées angulaires de g dans le système du plan εg. $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$ sont les *les coordonnées de* P ; $\psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4$ *celles de* g, — on peut semblablement employer les abscisses comme coordonnées.

L'auteur se propose de publier prochainement un travail plus complet et plus explicite sur ce sujet.

12. — M. le professeur Louis Kollros (Zurich). *Sur une dualité.* — On peut établir entre la géométrie ponctuelle à 4 dimensions et la géométrie des sphères une liaison telle qu'à un point, une droite, un plan et un espace à 3 dimensions de la première correspondent respectivement une sphère, un cercle, une paire de

points et un réseau de sphères (toutes orthogonales à une sphère fixe) de la seconde.

On trouve ainsi (parmi beaucoup d'autres[1]) quelques théorèmes qui n'ont pas, à notre connaissance, été énoncés jusqu'ici ; par exemple :

1. Etant données 2 paires de points : p_1 et p_2 et une sphère : s, il existe, en général, une seule paire : x de points de s telle que les 2 paires x et p_1 d'une part, x et p_2 d'autre part, soient sur un cercle.

2. Etant données 3 paires de points : $p_1 p_2 p_3$ et une sphère : s, il existe, en général, un seul cercle de s qui soit sur une sphère avec p_1, respectivement p_2 et p_3.

3. Etant donnés 3 cercles quelconques $c_1 c_2 c_3$ de l'espace, il existe toujours un plan, et en général un seul, qui coupe les 3 cercles en 6 points d'un nouveau cercle : a_4 (cercle *associé* à $c_1 c_2 c_3$).

Sur chaque arête du trièdre formé par les plans des 3 cercles donnés, il y a un point, et en général un seul, qui a la même puissance par rapport aux 2 cercles adjacents. Le plan de jonction de ces 3 points est le plan cherché.

4. Etant donnés 4 cercles : $c_1 c_2 c_3 c_4$, en les combinant 3 à 3, on obtient 4 cercles associés : $a_1 a_2 a_3 a_4$ (a_1 est l'associé de $c_2 c_3 c_4$, etc.). Si l'on désigne par s_i la sphère orthogonale aux 2 cercles c_i et a_i $i = (1, 2, 3, 4)$, on peut prouver que les 4 sphères : $s_1 s_2 s_3 s_4$ sont orthogonales à un même cercle : c_5 ; nous l'appellerons le *complémentaire* du groupe $(c_1 c_2 c_3 c_4)$.

Les 5 cercles : $c_1 \dots c_5$ jouissent de propriétés symétriques ; chacun est le complémentaire du groupe formé par les 4 autres. En les combinant 3 à 3, puis 2 à 2, on trouve respectivement 10 cercles associés et 10 sphères analogues aux s_i. Ces *10 sphères* forment avec les *15 cercles* une configuration curieuse telle que chaque sphère soit orthogonale à 6 cercles, chaque cercle étant orthogonal à 4 sphères. Les 15 cercles peuvent se réunir de 6 manières différentes en groupes de 5 jouissant des mêmes propriétés que $c_1 \dots c_5$.

5. Par une transformation corrélative dans l'espace à 4 dimensions, on trouve que 4 paires de points $p_1 p_2 p_3 p_4$ choisies arbitrairement déterminent d'une manière unique 10 sphères et 11 autres paires de points telles que chaque sphère passe par 6 paires de points et que chacune des 15 paires soient situées sur 4 sphères.

La paire p_5 complémentaire du groupe $(p_1 p_2 p_3 p_4)$ jouit d'une propriété intéressante ; sur une sphère quelconque, il n'existe pas, en général, de cercle situé sur une sphère avec p_1, respectivement p_2, p_3 et p_4 ; mais si la sphère passe par p_5 (condition suffi-

[1] Les nombreuses propriétés des *cyclides* s'établissent très simplement par ce procédé.

sante, mais pas nécessaire), elle contient toujours un tel cercle, et, en général, un seul.

13. — M. le Dr Ferd. GONSETH (Zurich). *Extensions d'un théorème de Poncelet.* — I. M. GONSETH expose trois extensions du théorème de Poncelet : *S'il existe un polygone inscrit à une conique et circonscrit à une seconde conique, il en existe une simple infinité, d'un même nombre de côtés.*

A) S'il existe un polygone gauche inscrit à une cubique gauche C_3, et dont les plans joignant deux côtés consécutifs sont osculateurs à une seconde cubique gauche T_3, si de plus C_3 et T_3 sont réciproques dans un système focal arbitraire, il existe une simple infinité de pareils polygones gauches.

La condition que C_3 et T_3 soient réciproques dans un système focal arbitraire est essentielle.

II. Viennent ensuite deux extensions du théorème de WEYR [1] : S'il existe sur une conique un groupe de $n + 1$ points dont toutes les droites de jonction de tous les points 2 à 2 sont tangentes à une courbe de classe n, T_n, il existe sur la conique une simple infinité linéaire de groupe de $n + 1$ points dont les droites de jonction touchent T_n.

Ce théorème est évidemment lui-même une généralisation du théorème de Poncelet. Ces extensions sont :

B) S'il existe sur une quadrique une courbe de $(n + 1)^{\text{ème}}$ ordre dont toutes les bisécantes sont comprises dans un complexe de $n^{\text{ème}}$ ordre, C_n, il existe sur la quadrique une simple infinité de courbes de $(n + 1)^{\text{ème}}$ ordre dont toutes les bisécantes sont comprises dans C_n.

C) S'il existe sur une cubique gauche C_3 2 groupes de $n + 2$ points dont tous les plans de jonction de tous les points 3 à 3 dans chaque groupe touchent une même surface de $n^{\text{ème}}$ classe, il existe sur la cubique gauche une double infinité linéaire de pareils groupes de $n + 2$ points.

Discussion : M. GROSSMANN.

14. — M. le Dr Ed. GUILLAUME (Berne). *Sur l'impossibilité de ramener à une probabilité composée la loi des écarts à plusieurs variables.* — L'auteur montre d'abord un petit appareil permettant de tracer rapidement, sur une feuille de papier, un grand nombre de points répartis suivant la loi des écarts à deux variables, comme les points d'impact sur une cible. L'appareil se compose d'un entonnoir dont l'axe est vertical, maintenu au-dessus d'un certain nombre de grilles horizontales superposées. Sous les

---

[1] *Mathematische Annalen.*

grilles, à une certaine distance, on place une feuille de papier millimétré et, sur cette feuille, une feuille de papier carbone. En mettant dans l'entonnoir de la grenaille de plomb, les grains s'écoulent, traversent successivement les grilles superposées, ce qui les disperse, et tombent finalement sur le papier carbone en faisant une marque sur le papier millimétré. Lorsqu'un grand nombre N de grains sont tombés, celui-ci offre une image très nette de la répartition des points d'impact.

Le papier millimétré permet de diviser facilement le plan en un grand nombre de petites cases carrées identiques, de côtés $\Delta x = \Delta y = \varepsilon$. La probabilité pour qu'un des grains, désigné à l'avance, soit tombé sur une case de coordonnées x_0, y_0 et de surface ε^2 est, approximativement, en appelant n le nombre de grains tombés dans cette case, et A et a deux constantes caractéristiques de l'appareil :

$$\frac{n}{\mathrm{N}} = \mathrm{A}^2 e^{-a(x_0^2 + y_0^2)} \varepsilon^2 .$$

Cette probabilité peut se décomposer en un produit de 2 autres probabilités : $\mathrm{A}e^{-ax_0^2}\varepsilon$ et $\mathrm{A}e^{-ay_0^2}\varepsilon$. Par exemple, $\mathrm{A}e^{-ax_0^2}\varepsilon$ est la probabilité pour que le point ait une abscisse comprise entre x_0 et $x_0 + \varepsilon$, autrement dit, soit tombé dans une bande (x_0, y) de largeur ε, formée par toutes les cases d'abscisse x_0, et parallèle à l'axe des y. Si n_1 est le nombre de grains tombés dans cette bande, on aura :

$$\mathrm{A}e^{-ax_0^2}\varepsilon = \frac{n}{\mathrm{N}} .$$

On aura de même pour les grains tombés dans la bande (x, y_0) parallèle à l'axe des x à la distance y_0 :

$$\mathrm{A}e^{-ay_0^2}\varepsilon = \frac{n_2}{\mathrm{N}} .$$

Or, on ne peut traiter $\mathrm{A}e^{-ax_0^2}\varepsilon$ et $\mathrm{A}e^{-ay_0^2}\varepsilon$ comme deux *probabilités indépendantes,* car il y a une *liaison géométrique qui n'apparaît pas analytiquement:* la répartition des points dans une bande, par exemple (x_0, y), dépend de la répartition des points de toutes les bandes qui lui sont perpendiculaires, en particulier de la bande (x, y_0). Les grains n_1 et n_2 ne pourraient donc faire l'objet de *deux* tirages dans une urne. Le fait qu'il peut y avoir liaison géométrique sans liaison analytique a déjà été entrevu par Poincaré (*Dernières pensées,* p. 64)[1].

---

[1] Voir en outre : Ed. GUILLAUME, La Théorie des Probabilités et la Physique, *Arch. Sc. phys. et nat.* 1914, t. XXXVIII et 1915 t. XXXIX, pp. 373, 205 et 302.

15. — *Séance administrative de la Société mathématique suisse.* — M. le Prof. H. Fehr, président, donne un rapide aperçu de l'exercice écoulé. Depuis la réunion extraordinaire, tenue à Zurich en mai 1914, le Comité a admis dix nouveaux membres, dont deux au cours de la séance annuelle : MM. G. Tiercy (Genève), E. Rod (Genève), F. Lévy (Genève), Mme Gr. Young (Genève), MM. Berliner (Berne), C.-E. Guye (Genève), F. Gonseth (Genève), Pólya (Zurich), Fr. Laurent (Genève), Denis (Genève). Par contre il a eu le regret d'enregistrer le décès de MM. Guccia (Palerme), G. Cellérier (Genève) et H. v. Wayer (Bâle-C.). La Société compte actuellement 144 membres.

Sur la proposition des vérificateurs des comptes, MM. Crelier et Marchand, la Société approuve le rapport du trésorier, M. Plancherel. Elle procède ensuite au renouvellement de son comité pour les années 1916 et 1917. Sont élus MM. les Prof. Grossmann (Zurich), président; M. Plancherel (Fribourg), vice-président; L. Crelier (Bienne-Berne), secrétaire-trésorier.

La prochaine réunion ordinaire aura lieu dans les Grisons.

Nouvelles diverses. — Nominations.

M. Harold Bohr, professeur adjoint à l'Université de Copenhague, est nommé professeur de mathématiques à l'Ecole polytechnique de la même ville, en remplacement de M. le professeur P. C. V. Hansen, qui prend sa retraite.

M. K. Bopp, privat-docent, est nommé professeur extraordinaire à l'Université de Heidelberg.

M. G. Faber, professeur à l'Université de Strasbourg, est nommé professeur à l'Ecole technique supérieure de Munich.

M. U. C. Mitchell est nommé professeur extraordinaire à l'Université de Kansas.

M. Joh. Mollerup est nommé professeur adjoint à l'Université de Copenhague, en remplacement de M. Bohr, appelé à l'Ecole polytechnique.

M. F. W. Owens est nommé professeur extraordinaire à l'Université Cornell, Ithaca, E.-U.

M. H. B. Philipps est nommé professeur extraordinaire à l'Institut technologique de Boston, Mass.

Privat-docents. — Ont été admis en qualité de privat-docents pour les mathématiques, MM. J. Radon et Rulf, à l'Ecole technique supérieure de Vienne, M. Simandl, à l'Ecole technique supérieure de Brünn, et M. G. Tiercy, à l'Université de Genève.

Nécrologie.

M. H. Ganter, professeur au Gymnase d'Aarau (Suisse), est décédé le 29 juillet 1915. Très apprécié par ses élèves, il était