II. — Formules de $\sin (\alpha \pm \beta)$ et $\cos (\alpha \pm \beta)$.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1915)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Les segments, déterminés par les hauteurs, qu'il faut suivre pour aller de A vers B, puis de B vers C, et enfin de C vers A seront appelés $c'c''$ (sur c), $a'a''$ (sur a), $b'b''$ (sur b).

II. — Formules de sin ($\alpha \pm \beta$) et cos ($\alpha \pm \beta$).

Démonstrations basées sur un théorème de géométrie et son corollaire.

A. — *Formule du sinus de la somme de deux arcs.* — *La somme de deux angles d'un triangle quelconque et le 3e angle étant supplémentaires,* leurs sinus sont égaux :

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma \ . \tag{1}$$

Il est donc tout naturel de partir de cette relation pour chercher à établir une nouvelle démonstration de la formule du sinus de la somme de deux arcs. D'après la fig. 1 :

$$\sin \gamma = \frac{h'}{b} \ .$$

La relation (1) devient :

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{h'}{b} \ .$$

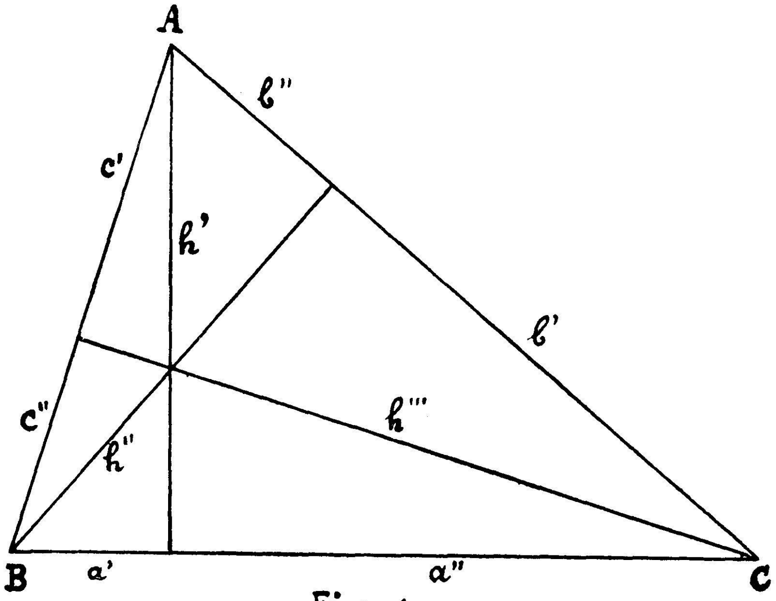

Fig 1.

On a successivement

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{h' . c}{b . c} = \frac{h'(c' + c'')}{b . c} = \frac{h'}{c} . \frac{c' + c''}{b} \ .$$

Mais

$$\frac{h'}{c} = \frac{h'''}{a} .$$

Par suite

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{h'''}{a} \cdot \frac{c' + c''}{b} = \frac{h'''c''}{ab} + \frac{h'''c'}{ab} ,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{h'''}{b} \cdot \frac{c''}{a} + \frac{c'}{b} \cdot \frac{h'''}{a} .$$

ou

$$\text{(I)} \qquad \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \, . \cos\beta + \cos\alpha \, . \sin\beta .$$

B. — *Formule du cosinus de la somme de deux arcs.* — α, β et γ étant les angles d'un triangle, nous avons :

$$\cos(\alpha + \beta) = -\cos\gamma .$$

La figure 1 donne

$$\cos\gamma = \frac{a''}{b} ,$$

d'où, en remplaçant :

$$\cos(\alpha + \beta) = -\frac{a''}{b} = -\frac{aa''}{ab} .$$

Nous établirons plus loin la relation suivante :

$$h'''^2 = c'c'' + aa'' ,$$

d'où

$$aa'' = h'''^2 - c'c'' .$$

Substituons ci-dessus :

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{c'c'' - h'''^2}{ab} = \frac{c'}{b} \cdot \frac{c''}{a} - \frac{h'''}{b} \cdot \frac{h'''}{a} ,$$

ou

$$\text{(II)} \qquad \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \, . \cos\beta - \sin\alpha \, . \sin\beta .$$

C. — *Formule du sinus de la différence de deux arcs.* — Au lieu de déduire cette formule de la relation (1) en y remplaçant β par $-\beta$, on peut aussi l'obtenir directement de la figure 1 par un procédé peu différent de celui déjà employé.

Supposons que α soit un angle aigu du triangle et désignons par α' l'angle extérieur correspondant à α. *Il vaut la somme des angles intérieurs non adjacents :*

$$\alpha' = \beta + \gamma$$

d'où

$$\gamma = \alpha' - \beta , \qquad \sin\gamma = \sin(\alpha' - \beta) .$$

Mais

$$\sin\gamma = \frac{h'}{b} .$$

Par suite

$$\sin(\alpha' - \beta) = \frac{h'}{b} = \frac{h'(c' + c'')}{b \cdot c} = \frac{h'}{c} \cdot \frac{c' + c''}{b} .$$

$$\sin(\alpha' - \beta) = \frac{h'''}{a} \cdot \frac{c' + c''}{b} = \frac{h'''}{b} \cdot \frac{c''}{a} + \frac{c'}{b} \cdot \frac{h'''}{a} ,$$

$$= \frac{h'''}{b} \cdot \frac{c''}{a} - \left[- \frac{c'}{b} \right] \cdot \frac{h'''}{a} .$$

Or

$$\cos\alpha' = - \frac{c'}{b}$$

puisque α' est obtus ; donc

$$\text{(III)} \qquad \sin(\alpha' - \beta) = \sin\alpha' . \cos\beta - \cos\alpha' . \sin\beta .$$

D. — *Formule du cosinus de la différence de deux arcs.* — Au lieu de tirer cette formule de la relation (II) en y remplaçant β par $-\beta$, on peut aussi l'établir en se basant sur la figure 1.

Choisissons un angle aigu α du triangle et soit α' l'angle extérieur correspondant. Nous pouvons écrire successivement :

$$\alpha' = \beta + \gamma , \qquad \gamma = \alpha' - \beta ;$$

$$\cos\gamma = \cos(\alpha' - \beta) , \qquad \cos(\alpha' - \beta) = \frac{a''}{b} = \frac{aa''}{ab} ,$$

$$h'''^2 = c'c'' + aa'' ,$$

$$\cos(\alpha' - \beta) = \frac{h'''^2 - c'c''}{ab} = \frac{h'''}{b} \cdot \frac{h'''}{a} - \frac{c'}{b} \cdot \frac{c''}{a} ;$$

α' est obtus :

$$\sin\alpha' = \frac{h'''}{b} ; \qquad \sin\beta = \frac{h'''}{a} ;$$

$$\cos\alpha' = - \frac{c'}{b} ; \qquad \cos\beta = \frac{c''}{a} ;$$

$$\text{(IV)} \qquad \cos(\alpha' - \beta) = \cos\alpha' . \cos\beta + \sin\alpha' . \sin\beta .$$

III. — Conséquences géométriques résultant de l'application des formules de trigonométrie au triangle quelconque.

En appliquant les formules précédentes et celles qui en découlent au triangle quelconque, on retrouve les relations de certains théorèmes importants de géométrie et l'on arrive à établir des théorèmes nouveaux.