

# Introduction.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1917)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

LES ANTINOMIES DE RUSSELL ET DE BURALI-FORTI  
ET LE  
PROBLÈME FONDAMENTAL  
DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES

PAR

D. MIRIMANOFF (Genève).

---

*Introduction.*

Aucune théorie mathématique n'a fourni, comme on le sait, autant de faits paradoxaux et d'antinomies, au moins apparentes, que la fameuse théorie des ensembles de Cantor. Les plus connues et les plus importantes de ces antinomies sont celles de Russell et de Burali-Forti; mais combien d'autres faits bizarres ont été révélés, depuis la publication des premiers travaux de Cantor sur la théorie des ensembles, par Borel, Peano, Richard et Cantor lui-même.

Les antinomies cantoriennes, qui déconcertent et déroutent presque toujours au premier abord, ont fait le désespoir de quelques géomètres logiciens. C'est là sans doute qu'il faut voir la cause de la défiance exagérée que les idées et les théories cantoriennes les mieux établies inspirent à des esprits particulièrement défiants.

Est-il besoin de dire que rien ne justifie, au fond, ni cette défiance ni ce désespoir? N'avons-nous pas eu des surprises comparables dans la théorie des fonctions et en géométrie?

Qu'on se rappelle, par exemple, la découverte par Riemann et Weierstrass de fonctions continues non dérivables et de courbes sans tangentes, dont une étude approfondie n'a

justement pu être faite depuis qu'à l'aide de la théorie des ensembles<sup>1</sup>; on pourrait citer également la propriété si curieuse des séries semi-convergentes, révélée par Lejeune Dirichlet, d'avoir une somme dépendant de l'ordre des termes.

Dans tous ces cas, il y a une contradiction manifeste entre les faits nouveaux et les propriétés que nous croyions toujours vraies et qui nous semblaient évidentes, mais qui reposaient en réalité sur une expérience ou une intuition incomplètes, et n'étaient vraies que sous certaines conditions. C'est ainsi que, dans le cas des séries semi-convergentes, le fait nouveau signalé par Dirichlet semble incompatible avec la propriété fondamentale de l'addition algébrique, qui est d'être une opération commutative. Cette propriété est toujours vraie dans un domaine fini, mais les exemples de Dirichlet prouvent qu'elle peut cesser d'être vraie lorsque les substitutions par lesquelles on passe à l'ordre nouveau portent sur un nombre infini d'addendes. Le sentiment d'évidence repose ici sur une intuition incomplète.

Or les antinomies cantorienne et, en particulier, celles de Russell et de Burali-Forti sont comparables aux exemples que nous venons de rappeler. On croyait, et il semblait évident, que l'existence des individus devait entraîner nécessairement celle de leur ensemble; mais Burali-Forti et Russell ont montré, par des exemples différents, qu'un ensemble d'individus peut ne pas exister, bien que ces individus existent. Comme nous ne pouvons pas ne pas accepter ce fait nouveau, nous sommes obligés d'en conclure que la proposition qui nous semblait évidente et que nous croyions toujours vraie est inexacte, ou plutôt qu'elle n'est vraie que sous certaines conditions<sup>2</sup>. Et alors le problème suivant se pose, que l'on peut regarder comme le problème fondamental de la théorie des ensembles :

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un ensemble d'individus existe ?

Certes, l'étude de ce problème est moins avancée que celle

<sup>1</sup> Cf. M<sup>me</sup> Grace Chisholm Young : *Sur les courbes sans tangente* (*Ens. math.*, année 1915, p. 348).  
Cf. J. KÖNIC : *Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre*, chap. II.

des séries semi-convergentes, mais le premier pas est fait, grâce surtout aux recherches de Russell<sup>1</sup>, H. Poincaré<sup>2</sup> et J. König<sup>3</sup>. Dans les derniers paragraphes de ce travail, je donne une solution du problème fondamental pour le cas particulier des ensembles que j'appelle ensembles ordinaires. Mes déductions s'appuient sur trois postulats, qu'on applique couramment dans l'étude des problèmes de la théorie des ensembles.

D'autre part, les exemples mêmes de Russell et de Burali-Forti auraient besoin d'être examinés de plus près. Je ferai voir qu'il est facile de donner une forme plus précise à l'exemple de Russell en le débarrassant de difficultés parasites qui n'ont rien à faire avec l'antinomie de Russell proprement dite. Je transformerai de même l'exemple de Burali-Forti, ce qui va me permettre de faire un rapprochement nouveau entre les deux antinomies.

Je ferai abstraction, dans ce travail, des distinctions nouvelles introduites par J. König (*loc. cit.*) dans la théorie des ensembles quelconques, et en particulier dans celle des ensembles bien ordonnés. Deux ensembles contenant les mêmes éléments ne seront jamais regardés comme différents, à moins qu'on ne tienne compte des relations d'ordre; et à tout ensemble bien ordonné, s'il existe, correspondra, par définition, un type d'ordre déterminé. Je donnerai dans un autre travail les raisons qui m'ont déterminé à ne pas rattacher cette étude à la théorie de J. König.

Je commencerai par l'antinomie de Russell.

### *Antinomie de Russell.*

1. On sait que Russell distingue deux sortes d'ensembles :  
Un ensemble  $E$  est de première sorte s'il diffère de chacun de ses éléments.

<sup>1</sup> RUSSELL : *The Principles of Mathematics*.

<sup>2</sup> H. POINCARÉ : *Science et Méthode. Dernières pensées*.

<sup>3</sup> J. KÖNIG : *loc. cit.*, chap. II et IX. On trouvera des indications bibliographiques et des remarques intéressantes dans le livre de G. HESSENBERG : *Grundbegriffe der Mengenlehre*; dans le t. II de l'ouvrage de K. SCHOENFLIES : *Die Entwicklung der Lehre von der Punkt-mannigfaltigkeiten*; et dans les mémoires de ZERMELO.