Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 19 (1917)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES ANTINOMIES DE RUSSELL ET DE BURALI-FORTI ET LE PROBLÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES
Autor: Mirimanoff, D.
Kapitel: Antinomie de Russell.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-17315

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

des séries semi-convergentes, mais le premier pas est fait, grâce surtout aux recherches de Russell[1], H. Poincaré[2] et J. König[3]. Dans les derniers paragraphes de ce travail, je donne une solution du problème fondamental pour le cas particulier des ensembles que j'appelle ensembles ordinaires. Mes déductions s'appuient sur trois postulats, qu'on applique couramment dans l'étude des problèmes de la théorie des ensembles.

D'autre part, les exemples mêmes de Russell et de Burali-Forti auraient besoin d'être examinés de plus près. Je ferai voir qu'il est facile de donner une forme plus précise à l'exemple de Russell en le débarrassant de difficultés parasites qui n'ont rien à faire avec l'antinomie de Russell proprement dite. Je transformerai de même l'exemple de Burali-Forti, ce qui va me permettre de faire un rapprochement nouveau entre les deux antinomies.

Je ferai abstraction, dans ce travail, des distinctions nouvelles introduites par J. König (*loc. cit.*) dans la théorie des ensembles quelconques, et en particulier dans celle des ensembles bien ordonnés. Deux ensembles contenant les mêmes éléments ne seront jamais regardés comme différents, à moins qu'on ne tienne compte des relations d'ordre ; et à tout ensemble bien ordonné, s'il existe, correspondra, par définition, un type d'ordre déterminé. Je donnerai dans un autre travail les raisons qui m'ont déterminé à ne pas rattacher cette étude à la théorie de J. König.

Je commencerai par l'antinomie de Russell.

Antinomie de Russell.

1. On sait que Russell distingue deux sortes d'ensembles :

Un ensemble E est de première sorte s'il diffère de chacun de ses éléments.

---

[1] Russell : *The Principles of Mathematics.*

[2] H. Poincaré : *Science et Méthode. Dernières pensées.*

[3] J. König : *loc. cit.*, chap. II et IX. On trouvera des indications bibliographiques et des remarques intéressantes dans le livre de G. Hessenberg : *Grundbegriffe der Mengenlehre* ; dans le t. II de l'ouvrage de K. Schoenflies : *Die Entwicklung der Lehre von der Punktmannigfaltigkeiten* ; et dans les mémoires de Zermelo.

Un ensemble E est de seconde sorte s'il contient un élément qui ne diffère pas de E.

Il résulte de cette définition qu'un ensemble de deuxième sorte contient toujours parmi ses éléments un ensemble de deuxième sorte. D'où ce *lemme* :

Un ensemble d'ensembles de *première sorte* est également un ensemble de *première sorte*.

Envisageons maintenant, avec Russell, l'ensemble R de *tous* les ensembles de *première sorte*.

Il est facile de montrer que cet ensemble n'existe pas. En effet, s'il existait, il devrait être, en vertu du lemme précédent, de première sorte, c'est-à-dire différent de chacun de ses éléments ; d'autre part, l'ensemble R doit contenir *tous* les ensembles de première sorte, donc, en particulier, l'ensemble R lui-même, — résultat absurde.

Par conséquent, les conditions exprimées par les mots *première sorte* et *tous* sont incompatibles, et l'ensemble R n'existe pas.

Tel est l'exemple remarquable donné par Russell, et il prouve bien, comme je l'ai rappelé dans l'introduction, qu'un ensemble d'individus peut ne pas exister bien que ces individus existent [1].

2. — Nous allons maintenant donner à l'exemple de Russell une forme légèrement différente.

Faisons remarquer d'abord que la seule propriété des éléments qui intervienne dans cet exemple est leur composition. Un élément est-il un ensemble ou non (par définition) ? et s'il l'est, de quelle manière se compose-t-il ? Ses éléments sont-ils à leur tour décomposables ou non ?... et ainsi de suite. Voilà ce qui est seul important de savoir.

Pour préciser, j'introduirai une notion qui nous sera très utile dans la suite.

Soient deux ensembles E et E'. Je dirai qu'ils sont *isomorphes* si les conditions suivantes sont satisfaites :

a) Les ensembles E et E' sont équivalents ; en d'autres

[1] On sait que l'exemple de Burali-Forti, que nous allons examiner plus loin, a été donné avant celui de Russell.

termes, une correspondance parfaite peut être établie entre les éléments de E et ceux de E′.

b) Cette correspondance peut être établie de telle manière qu'à tout élément indécomposable e de E corresponde un élément indécomposable e' de E′, et réciproquement ; et qu'à tout élément-ensemble F de E corresponde un élément-ensemble équivalent F′ de E′, la correspondance parfaite entre les éléments de F et F′ pouvant être à son tour établie de telle manière qu'à tout élément indécomposable de F corresponde un élément indécomposable de F′, et à tout élément-ensemble de F un élément-ensemble équivalent de F′, — et ainsi de suite.

Si donc deux ensembles sont isomorphes, les éléments correspondants le sont aussi, et réciproquement.

Sont isomorphes, par exemple, les deux ensembles $(e_1, e_2, \ldots, e_m, \mathrm{F})$, $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_m, \mathrm{F}')$[1], où les e et les e' sont des éléments indécomposables, et les F, F′ des ensembles contenant chacun un même nombre d'éléments indécomposables.

Nous dirons qu'un ensemble E est de première sorte s'il n'est isomorphe à aucun de ses éléments ; nous dirons qu'il est de deuxième sorte s'il est isomorphe à l'un au moins de ses éléments. Est, par exemple, de deuxième sorte l'ensemble $\mathrm{E} = (e, \mathrm{E}')$, où $\mathrm{E}' = (e', \mathrm{E}'')$, $\mathrm{E}'' = (e'', \mathrm{E}''')$, et en général $\mathrm{E}^{(n)} = (e^{(n)}, \mathrm{E}^{(n+1)})$ pour tout n, les e désignant des éléments indécomposables.

La définition que nous venons de donner n'est pas identique à celle du paragraphe précédent, mais les propriétés essentielles des ensembles de première et de deuxième sorte subsistent, et le lemme reste vrai.

Revenons maintenant à l'antinomie de Russell. Envisageons l'ensemble R′ de tous les ensembles de première sorte, au sens nouveau. On démontre comme dans le paragraphe précédent, que cet ensemble n'existe pas. En effet, s'il existait,

---

[1] Dans ce travail, je désigne un ensemble dont les éléments sont $a, b, c, \ldots$ par $(a, b, c, \ldots)$, et cela quels que soient ces éléments ; par exemple, une parenthèse de la forme (E, F), où E, F sont des ensembles, représente l'ensemble dont les éléments sont E et F, et non l'ensemble-somme formé par la réunion des ensembles E et F.

il serait, en vertu de notre lemme, de première sorte, et, d'autre part, il devrait être isomorphe à l'un de ses éléments, résultat absurde.

La forme nouvelle sous laquelle nous venons de mettre l'exemple de Russell ne se prête pas bien, comme nous le verrons dans la suite, à un rapprochement avec l'exemple de Burali-Forti. Pour y arriver, une transformation nouvelle est nécessaire. Je vais la donner dans le paragraphe suivant.

3. — Je commencerai par introduire une notion dont nous nous servirons souvent.

Soient E un ensemble, E′ un de ses éléments, E″ un élément quelconque de E′, et ainsi de suite. J'appelle *descente* la suite des passages de E à E′, de E′ à E″, etc. Cette descente prend fin lorsqu'on tombe sur un élément indécomposable. Dans ce cas elle est finie, mais elle peut ne pas l'être, ce qui arrive par exemple pour tout ensemble de deuxième sorte E, lorsqu'on passe de cet ensemble E à l'élément E′ qui lui est isomorphe, de E′ à son isomorphe E″, et ainsi de suite.

Je dirai qu'un ensemble est *ordinaire* lorsqu'il ne donne lieu qu'à des descentes finies ; je dirai qu'il est *extraordinaire* lorsque parmi ses descentes il y en a qui sont infinies.

Tout ensemble de deuxième sorte est donc un ensemble extraordinaire, mais ces deux notions (d'ensemble de deuxième sorte et d'ensemble extraordinaire) ne sont pas équivalentes, puisqu'une descente infinie peut se présenter aussi dans un ensemble de première sorte.

Soit, par exemple, l'ensemble $E = (e_1, E')$, où E′ est un ensemble de la forme (e_1, e_2, E''), $E'' = (e_1, e_2, e_3, E''')$, et, en général, $E^{(n)} = (e_{n+1}, e_1, e_2, E^{(n+1)})$ pour tout n. L'ensemble E ainsi défini est de première sorte, bien que la descente E, E′,... $E^{(n)}$... soit infinie.

Appelons *longueur* d'une descente (dans un ensemble ordinaire) le nombre des passages qui la constituent. A toute descente correspond ainsi un nombre entier n déterminé, mais cette correspondance n'est pas biunivoque en général, et les nombres n bien que finis, ne sont pas nécessairement bornés dans leur ensemble.

Les propriétés des ensembles de première sorte dont nous

avons fait usage dans le paragraphe précédent subsistent pour les ensembles ordinaires ; notre lemme reste vrai et s'énonce de la manière suivante :

Un ensemble d'ensembles ordinaires est un ensemble ordinaire.

Envisageons maintenant l'ensemble V de *tous* les ensembles *ordinaires* existants. On démontre, comme dans les paragraphes 1 et 2, que l'ensemble V ne saurait exister.

Introduisons à présent une restriction.

Soit E un ensemble ordinaire. Par définition, toutes les descentes de E sont finies et aboutissent à des éléments indécomposables qui, bien entendu, ne sont pas en général des éléments de E. Pour éviter la confusion, je les appellerai *noyaux* de E.

Envisageons les ensembles ordinaires dont les noyaux $e, f, g, \ldots$ font partie d'un ensemble existant donné $N = (e, f, g, \ldots)$. Soit V′ l'ensemble de tous ces ensembles. On démontre immédiatement que cet ensemble, qui est un sous-ensemble de V n'existe pas non plus.

En particulier, l'ensemble de tous les ensembles ordinaires à un seul noyau e n'existe pas. Dans le paragraphe 7 nous serons amené à définir des ensembles à un noyau d'une forme particulière.

En partant des ensembles déjà introduits, on peut définir des ensembles non-existants d'une nature différente.

Soit, par exemple, E un ensemble de première sorte au sens nouveau, et $\mathfrak{E}$ l'ensemble de tous les ensembles isomorphes à E. A tout E correspond un $\mathfrak{E}$, et si un ensemble E′ est non-isomorphe à E, l'ensemble correspondant $\mathfrak{E}'$ est différent de $\mathfrak{E}$. Prenons dans chacun des ensembles $\mathfrak{E}$ un représentant quelconque E_0. L'ensemble de tous ces E_0, qui est un sous-ensemble de R′, n'existe pas. Des sous-ensembles analogues peuvent être définis en partant des ensembles V et V′.

Dans les paragraphes suivants, j'aurai à m'appuyer sur une propriété des ensembles existants qui est loin d'être évidente, mais que je regarderai comme vraie, du moins pour les ensembles que j'envisage dans ce travail.

Propriété I. — L'existence d'un ensemble entraîne celle de tous ses sous-ensembles[1].

En vertu de cette propriété, il suffit de montrer que V′ n'existe pas pour en conclure immédiatement qu'il doit en être de même des ensembles V, R′ et R.

Antinomie de Burali-Forti.

4. — Burali-Forti arrive, comme on le sait, à l'antinomie qui porte son nom[2] par la considération des types d'ordre d'ensembles bien ordonnés (nombres ordinaux de Cantor). Je rappelle que ces nombres se succèdent suivant une loi déterminée, et forment une sorte de chaîne dont les premiers chaînons sont les suites finies de 1 (suite ou ensemble impropre), 2, ... n, ... éléments, puis la suite ω, et les types d'ordre $\omega + 1$, $\omega + 2$, ... $\omega + n$, etc.

Les propriétés des ensembles bien ordonnés sont très bien connues. Je me bornerai à en rappeler les deux suivantes qui nous seront particulièrement utiles :

a) Tout ensemble bien ordonné infini est semblable à l'ensemble de tous ses segments. Cette propriété est encore vraie pour les ensembles finis et, par conséquent, pour tous les ensembles bien ordonnés, si l'on adjoint à l'ensemble des segments un segment fictif dont le type d'ordre est 0, par définition. Je le désignerai par la lettre e. Il en résulte que tout nombre ordinal π est le type d'ordre de l'ensemble des nombres ordinaux $\alpha < \pi$, y compris 0.

b) Un ensemble bien ordonné n'est semblable à aucun de ses segments.

Ceci rappelé, envisageons avec Burali-Forti l'ensemble W de tous les nombres ordinaux de Cantor.

L'ensemble W ainsi défini n'existe pas. En effet, si W existait, il serait bien ordonné et aurait un type d'ordre π (cf. introduction) ; or, tout nombre π est un élément de W, et l'ensemble des nombres ordinaux $\alpha < \pi$ est un segment

---

[1] Cf. J. König : *loc. cit.*, chap. VI, § 16.

[2] Burali-Forti : *Una questione sui numeri transfiniti, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, vol. 11 (1897), p. 154.