

# Solution du problème fondamental dans le cas d'ensembles ordinaires.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1917)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

que les ensembles  $E$  ainsi définis sont bien les ensembles  $S$  du paragraphe précédent. A tout ensemble  $E$  correspond un type d'ordre déterminé, et l'ensemble de tous les ensembles  $E$  ne diffère pas de l'ensemble  $W'$ .

*Solution du problème fondamental dans le cas  
d'ensembles ordinaires.*

7. — L'étude des différentes antinomies que nous avons rencontrées jusqu'ici a mis en évidence les faits suivants : dans chacun de nos exemples, il est possible de former des ensembles de plus en plus vastes, mais l'ensemble de *tous* les individus n'existe pas ; quel que soit l'ensemble qu'on envisage (pourvu qu'il existe), des individus nouveaux surgissent, et un ensemble plus vaste apparaît nécessairement ; on est bien en présence d'une extension indéfinie qui ne comporte pas d'arrêt ou borne. En traitant le problème fondamental, je serai amené à préciser cette notion un peu vague de borne et d'absence de borne.

Rappelons à ce propos qu'on trouve dans les ouvrages cités au commencement de ce travail une analyse logique et psychologique approfondie des antinomies cantorienne et de la notion d'ensemble ; je n'en aurai pas besoin pour le but que j'ai en vue.

Nous supposerons que les ensembles ordinaires  $E$  que nous aurons à envisager dans l'étude du problème fondamental vérifient les deux conditions suivantes :

*Condition (a).* — Les éléments de  $E$  sont distincts ; il en est de même des éléments de chacun de ces éléments, et ainsi de suite. Par cette condition je n'écarte pas les ensembles  $E$  qui ont des éléments isomorphes ni ceux dont les éléments-ensembles contiennent des éléments isomorphes, etc. L'identité seule est exclue.

*Condition (b).* — Les noyaux  $e, f, g, \dots$  de tout ensemble  $E$  font partie d'un ensemble  $N = (e, f, g, \dots)$  que nous considérerons comme donné ou connu (cf. paragraphe 3).

Nous avons donc à résoudre le problème suivant :

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour

qu'un ensemble d'ensembles ordinaires distincts, vérifiant les conditions (a) et (b), existe ?

Je partirai des trois postulats suivants :

*Postulat 1.* — Si un ensemble d'ensembles ordinaires existe, il en est de même de l'ensemble de tous ses sous-ensembles distincts (Potenzmenge).

*Postulat 2.* — Si un ensemble  $(E, F, \dots)$ , où les éléments  $E, F, \dots$  sont des ensembles ordinaires, existe, il en est de même de la somme des ensembles  $E, F, \dots$  (Vereinigungsmenge)<sup>1</sup>.

*Postulat 3.* — Si un ensemble  $(a, b, c, \dots)$  existe, il en est de même de tout ensemble équivalent  $(E, F, G, \dots)$ , où  $E, F, \dots$  sont des ensembles ordinaires existants.

Commençons l'étude du problème fondamental par le cas particulièrement simple d'ensembles  $S$ .

Nous avons appelé *rang* d'un ensemble  $\alpha_s$  son type d'ordre  $\alpha$ . Je dis qu'en vertu du postulat 3, à tout nombre ordinal existant  $\alpha$  correspond un ensemble *existant*  $\alpha_s$ ; la deuxième hypothèse du paragraphe 5 doit donc être rejetée. En effet, un  $\alpha_s$  est l'ensemble de tous les ensembles  $S$  de rangs inférieurs à  $\alpha$ . Soit  $\pi$  le plus petit nombre existant tel que  $\pi_s$  n'existe pas; tous les éléments de  $\pi_s$  existent; d'autre part,  $\pi_s$  est équivalent à un ensemble bien ordonné existant; il devrait donc exister, en vertu du postulat 3, contrairement à notre supposition.

Il en résulte que l'ensemble  $W'$  de tous les  $\alpha_s$  est équivalent à l'ensemble  $W$  de Burali-Forti.

Je dirai que les ensembles  $S$  ou leurs rangs ont une borne cantorienne s'il existe un nombre ordinal supérieur au rang de chacun de ses ensembles. Dans le cas contraire, les ensembles  $S$  envisagés n'ont pas de borne cantorienne. On a alors le critère suivant: pour qu'un ensemble d'ensembles  $S$  non-isomorphes existe, il faut et il suffit que ces ensembles aient une borne cantorienne.

Supposons d'abord que les ensembles  $S$  envisagés n'aient pas de borne cantorienne. Je dis que l'ensemble de ces

<sup>1</sup> J. KÖNIG: *loc. cit.* chap. VI, par. 16.

ensembles, que je désignerai par  $\mathcal{E}$  ne saurait exister. Supposons le contraire, et soit  $\pi_s$  l'un des ensembles  $S$  envisagés. J'appelle  $A(\pi)$  l'ensemble des éléments de  $\mathcal{E}$  dont les rangs sont inférieurs à  $\pi$ , et par  $B(\pi)$  l'ensemble des ensembles  $S$  dont les rangs sont supérieurs à ceux des éléments de  $A$ , mais ne dépassent pas  $\pi$ . L'ensemble  $B(\pi)$  qui ne contient qu'un seul élément de  $\mathcal{E}$  (l'ensemble  $\pi_s$ ) est un sous-ensemble de  $(\pi + 1)_s$ ; il existe donc, en vertu de la propriété I.

A tout élément  $\pi_s$  de  $\mathcal{E}$  correspond un ensemble déterminé  $B(\pi)$ .

Si l'ensemble  $\mathcal{E}$  existait, il en serait de même, en vertu des postulats 3 et 2, de la somme des ensembles  $B(\pi)$  étendue à tous les éléments  $\pi_s$  de  $\mathcal{E}$ ; mais ce dernier ensemble n'est autre que l'ensemble  $W'$ , et nous savons que  $W'$  n'existe pas; donc l'ensemble  $\mathcal{E}$  n'existe pas non plus.

La première partie de notre critère est établie.

Supposons maintenant que les ensembles  $S$  envisagés ont une borne cantorienne. Je dis que l'ensemble  $\mathcal{E}$  de tous ces ensembles existe. Soit, en effet,  $\pi_s$  un ensemble  $S$  dont le rang soit supérieur aux rangs de nos ensembles; l'ensemble  $\mathcal{E}$  est un sous-ensemble de  $\pi_s$ ; il existe donc, en vertu de la propriété I.

Notre critère est établi.

Avant de passer à l'étude du cas général, je ferai quelques remarques pour préciser le problème.

8. — Faisons remarquer d'abord que le critère du paragraphe précédent reste vrai si, au lieu des ensembles  $S$ , on envisage les nombres ordinaux de Cantor.

Soit maintenant  $\mathcal{E} = (E_\alpha, E_\beta, \dots)$  un ensemble quelconque équivalent à un ensemble de nombres ordinaux  $\alpha, \beta, \dots$ . Si les nombres  $\alpha, \beta, \dots$  n'ont pas de borne cantorienne, l'ensemble  $(\alpha_s, \beta_s, \dots)$  n'existe pas. Par conséquent,  $\mathcal{E}$  ne saurait exister, en vertu du postulat 3, car son existence entraînerait celle de  $(\alpha_s, \beta_s, \dots)$ ; d'où ce lemme :

*Lemme.* — Un ensemble  $(E_\alpha, E_\beta, \dots)$  n'existe pas, si les nombres  $\alpha, \beta, \dots$  n'ont pas de borne cantorienne. Il en est de même, en vertu de la propriété I, de tout ensemble qui contient un sous-ensemble de cette nature.

Nous pouvons maintenant étendre la notion de rang au cas d'un ensemble ordinaire quelconque (existant).

*Définition (r).* — Le rang d'un ensemble ordinaire est le plus petit nombre ordinal supérieur aux rangs de ses éléments. Le rang d'un noyau est zéro.

Cette définition fournit un rang déterminé à tout ensemble ordinaire  $E$ . Supposons en effet que chacun des éléments de  $E$  ait un rang déterminé, en vertu de (r); je dis qu'il devra en être de même de l'ensemble  $E$ , puisque les rangs des éléments de  $E$  ont une borne cantorienne, en vertu du dernier lemme. Si donc  $E$  n'avait pas de rang déterminé, il existerait au moins un élément  $E'$  de  $E$  ayant la même propriété; de même  $E'$  contiendrait au moins un élément  $E''$  n'ayant pas de rang déterminé, et ainsi de suite, — résultat absurde, puisque toute descente telle que  $E, E', E'', \dots$  aboutit à un noyau dont le rang est zéro. Tout ensemble  $E$  a donc un rang déterminé, en vertu de (r).

9. — On a alors le critère suivant :

Pour qu'un ensemble d'ensembles ordinaires distincts vérifiant les conditions (a) et (b) existe, il faut et il suffit que les rangs de ces ensembles aient une borne cantorienne.

Je vais d'abord démontrer un lemme.

*Lemme.* — L'ensemble  $O_\alpha$  de tous les ensembles ordinaires distincts de rang  $\alpha$  vérifiant les conditions (a) et (b) existe, quel que soit le nombre ordinal  $\alpha$ .

Pour démontrer ce lemme, je me servirai d'un raisonnement que j'ai déjà employé dans le paragraphe précédent, et qui n'est qu'un transformé du principe d'induction complète.

Supposons que le lemme soit vrai pour tous les  $\alpha$  inférieurs à un nombre  $\pi$ . Je dis qu'il sera vrai pour  $\pi$ .

Soit, en effet,  $\Sigma$  la somme des ensembles  $O_\alpha$ , pour tous les  $\alpha < \pi$ . Cet ensemble existe, en vertu des postulats 3 et 2. Or, l'ensemble  $O_\pi$ , est un ensemble de sous-ensembles de  $\Sigma$ ; il existe donc, en vertu du postulat 1.

Le lemme s'en déduit immédiatement. En effet, si un ensemble  $O_\alpha$  n'existait pas, il en serait de même d'une suite d'ensembles  $O_{\alpha'}, O_{\alpha''}, \dots$ , où  $\alpha > \alpha' > \alpha'' \dots$ , résultat absurde, cette suite devant aboutir à l'ensemble  $O_0$ , c'est-à-dire à

l'ensemble  $N$  qui existe par hypothèse. Donc  $O_\alpha$  existe, quel que soit  $\alpha$ , C. Q. F. D.

Revenons maintenant à notre critère, et soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des ensembles ordinaires envisagés  $E$ .

Supposons d'abord que les rangs des ensembles  $E$  n'aient pas de borne cantorienne. Dans ce cas, l'ensemble  $\mathcal{E}$  n'existe pas, en vertu du lemme du paragraphe 8.

Supposons maintenant que les rangs des ensembles  $E$  ont une borne cantorienne, et soit  $\pi$  un nombre ordinal supérieur à tous ces rangs. Envisageons l'ensemble  $\Sigma$ , somme des  $O_\alpha$  relatifs à tous les  $\alpha < \pi$ . Cet ensemble existe, en vertu du dernier lemme et des postulats 3 et 2. Mais l'ensemble  $\mathcal{E}$  est un sous-ensemble de  $\Sigma$ . Il existe donc en vertu de la propriété I.

Notre critère est démontré.

Tels sont les principaux résultats que je voulais établir dans ce travail.

En résumé, dans les paragraphes consacrés aux antinomies de Russell et de Burali-Forti, je me suis attaché surtout à décrire et à coordonner d'une manière nouvelle des faits en partie connus. J'ai passé ensuite au problème fondamental dont j'ai donné une solution dans le cas d'ensembles ordinaires, en m'appuyant d'une part sur l'antonomie de Burali-Forti et, d'autre part, sur plusieurs postulats. Bien que ces postulats soient fréquemment employés dans l'étude des problèmes de la théorie des ensembles, ils sont loin d'être évidents, et auraient besoin d'être examinés de près et discutés.

J'aurai l'occasion de revenir sur ces questions dans un autre travail que je consacrerai aux antinomies cantorienne et à la théorie de J. König<sup>1</sup>.

Genève, mai-septembre 1916.

---

<sup>1</sup> Il m'a été impossible, à mon grand regret, de prendre connaissance des publications parues depuis le commencement de la guerre.