

Société mathématique suisse.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1917)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

<http://www.e-periodica.ch>

Société mathématique suisse.

Schuls, 8 août 1916.

La Société mathématique suisse a tenu sa septième réunion ordinaire à *Schuls* (Basse-Engadine), le 8 août 1916, sous la présidence de M. le prof. Marcel GROSSMANN (Zurich), à l'occasion de la réunion annuelle de la Société helvétique des Sciences naturelles. Quatorze communications ont été présentées à la Section mathématique; en voici les résumés :

1. — M. le prof. K. MERZ (Coire). — *Note historique sur la surface de Steiner*. — STEINER n'a rien publié sur la surface qui porte son nom; la méthode qu'il a employée pour l'engendrer m'a été communiquée par M. le prof. GEISER. SCHRÖTER simplifie cette méthode en remplaçant la gerbe de quadriques, utilisée par Steiner, par un réseau de coniques. On doit à KUMMER la première étude analytique. Voici un tableau¹ résumant l'histoire de la surface :

Steiner (Rome 1843) † 1863				
Schröter . 1863			Kummer 1863 — Weierstrass	
Cremona . 1864	Berner . . 1864		Cayley . . 1864	
Reye . . . 1867	Reye . . . 1867		Clebsch . 1867	
Sturm . . 1871			Laguerre. 1872	Bertini . . 1872
			Gerbaldi . 1881	
	Stahl . . . 1885			Beltrami . 1879
	Reye . . . 1896		Lacour . . 1896	Rohn . . . 1890
	Timerding 1898			Berzolari. 1892

Les travaux synthétiques sont mentionnés dans la première colonne; les travaux analytiques basés sur une représentation plane, dans la troisième; ceux qui emploient une transformation quadratique ont été intercalés dans la deuxième colonne; enfin, les quatrième et cinquième colonnes renferment les travaux qui conduisent à la théorie de certaines formes biquadratiques en rapport avec cette surface.

Le développement historique montre comment le problème,

¹ Voir les indications bibliographiques complètes dans : K. MERZ. Parallelfächen u. Centralfläche eines besonderen Ellipsoïdes u. die Steinersche Fläche. Beispiel einer quadratischen Transformation. — Aux indications données dans ce dernier travail, il faut ajouter les suivantes : LAGUERRE, OEuvres II, pages 281, et BELTRAMI, Opere, III, p. 168. — Voir aussi : Verhandlungen der schw. naturforsch. Gesellschaft, 1914, II, p. 102.

aperçu à la suite d'une vision géométrique géniale, se transforme peu à peu en un problème purement algébrique. La connaissance géométrique de la surface apparaît comme l'intuition qui guide à travers le dédale des relations arithmétiques et conduit à des résultats nouveaux et féconds.

2. — M. le prof. L. CRELIER (Berne-Bienne). — *Puissance d'une droite par rapport à un cercle.*

I. — PUISSANCE. — Théorème : *Etant donné tous les couples de tangentes à un cercle que l'on peut mener par les divers points d'une droite quelconque du plan de ce cercle, le produit des tangentes des demi-angles de la première tangente et du prolongement de la seconde tangente de chaque couple avec la droite donnée est constant.*

Cette constante s'appellera la puissance de la droite par rapport au cercle et nous aurons :

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi - \alpha'}{2} = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi - \beta'}{2} = \dots = \frac{r + p}{r - p} = \text{const.}$$

α = angle de la première tangente avec la droite

α' = » » deuxième » » »

r = rayon

p = distance du centre à la droite.

II. — FAISCEAUX. — Nous appellerons faisceaux de cercle F_3 ou F_4 l'ensemble des cercles admettant un même premier centre de similitude extérieur ou intérieur par rapport à tous les cercles. Nous aurons :

a) *Etant donné deux faisceaux $F_3^{(1)}$ et $F_3^{(2)}$ de même centre radical principal S , les points de coupe des tangentes extérieures communes de deux cercles quelconques des faisceaux, pris l'un dans $F_3^{(1)}$ et l'autre dans $F_3^{(2)}$ sont tous sur une même droite appelée l'axe radical principal des faisceaux. Les points de coupe des tangentes intérieures communes des mêmes cercles sont tous sur une autre droite appelée l'axe radical secondaire des deux faisceaux.*

Soient C_2 un cercle de $F_3^{(1)}$ et C_3' un cercle de $F_3^{(2)}$. Leurs tangentes extérieures communes se coupent en A . La droite SA est de mêmes puissances relatives par rapport à tous les cercles de $F_3^{(1)}$ et par rapport à tous ceux de $F_3^{(2)}$. Elle est encore de mêmes puissances relatives par rapport à C_2 et C_3' . Les puissances relatives par rapport aux cercles de $F_3^{(1)}$ sont ainsi les mêmes que celles par rapport aux cercles de $F_3^{(1)}$, puisqu'elles sont déterminées par C_2 et C_3' .

La droite SA est de mêmes puissances relatives par rapport à deux cercles quelconques pris, l'un dans $F_3^{(1)}$ et l'autre dans $F_3^{(2)}$.

Elle passe par les premiers centres de similitude correspondants, autrement dit les points de coupe des tangentes extérieures communes aux deux cercles sus-indiqués sont tous sur SA.

Le même raisonnement subsiste avec les tangentes intérieures et donne une nouvelle droite SD.

SA ou a_1 devient l'axe radical principal des deux faisceaux SD ou a_2 l'axe radical secondaire. Si nous désignons par $F_3^{(1)'} et F_3^{(2)'}$ les faisceaux compris dans les angles opposés des précédents, a_1 est aussi l'axe radical principal pour $F_3^{(1)'}$ et $F_3^{(2)'}$ et l'axe radical secondaire pour $F_3^{(1)}$ et $F_3^{(2)}$. Il en est de même pour a_2 .

b) Etant donné deux faisceaux $F_4^{(1)}$ et $F_4^{(2)}$, les points de coupe des tangentes extérieures communes à deux cercles pris, un dans $F_4^{(1)}$ et l'autre dans $F_4^{(2)}$, sont tous sur une même droite, l'axe radical principal des deux faisceaux. Les points de coupe des tangentes extérieures communes à deux autres cercles pris, l'un dans $F_4^{(1)}$ et l'autre dans $F_4^{(4)'}$ ou l'un dans $F_4^{(1)'}$ et le second dans $F_4^{(2)}$, sont également tous sur une même droite, l'axe radical secondaire des deux faisceaux.

III. — INVOLUTIONS. — Nous considérerons maintenant un point quelconque P du plan d'un faisceau F_3 ou F_4 complété par le faisceau conjugué F_3' ou F_4' , et par ce point nous mènerons deux tangentes à chaque cercle du faisceau. Soient t_1 et t_2 les deux tangentes à l'un quelconque des cercles. La puissance absolue de la droite $PS = a$ sera la même par rapport à tous les cercles du faisceau, F_3 et la même par rapport à tous les cercles du faisceau complémentaire F_3' .

Si nous posons : angle $(t_1 a) = \alpha$ et angle $(t_2 a) = \alpha'$, nous aurons

$$\text{Puissance de } a = \text{tg } \frac{\alpha}{2} \cdot \text{tg } \frac{\pi - \alpha'}{2}.$$

Avec les deux tangentes d'un autre quelconque des cercles du faisceau nous aurons également

$$\text{Puissance de } a = \text{tg } \frac{\alpha}{2} \cdot \text{tg } \frac{\pi - \alpha'}{2} = \text{tg } \frac{\beta}{2} \cdot \text{tg } \frac{\pi - \beta'}{2} = \dots = \text{constante.}$$

Les bissectrices des angles compris entre a et t_1 ou a et le prolongement de t_2 donnent lieu à un produit de tangentes trigonométriques constant; ces bissectrices forment une involution dont l'axe principal en $PS = a$.

THÉORÈME. — A tout point P du plan d'un faisceau F_3 ou F_4 de centre radical principal S correspond une involution de rayons. Les rayons conjugués sont les bissectrices des angles compris entre

l'axe $PS = a$ et la première tangente menée de P à chaque cercle du faisceau ; puis entre a et le prolongement de la deuxième tangente menée de P au même cercle. Les rayons doubles sont toujours réels dans le plan d'un faisceau F_4 et dans l'angle intérieur du plan d'un faisceau F_3 . Dans son angle extérieur ils sont imaginaires. Les rayons doubles réels sont les bissectrices des angles compris entre l'axe a et les tangentes des deux cercles du faisceau passant par le point considéré.

3. — M. le prof. O. SPIESS (Bâle). — *Problèmes de fermeture dans les courbes convexes*. — Soit C une courbe fermée quelconque ; soit k une construction qui fasse correspondre chaque point A de la courbe à un autre point A_1 ; admettons en outre que

1° A et A_1 se déterminent l'un l'autre de façon réciproque et univoque.

2° Si A décrit la courbe dans un certain sens, A_1 la décrit en sens contraire.

La construction K « ferme » quand $A_1 = A$ (*points fixes*) ; elle « ferme » si on l'exécute deux fois, quand $A_2 = A$, c'est-à-dire quand A et A_1 se correspondent mutuellement (*points mutuels*). Le problème de fermeture consiste à déterminer les *points fixes* et les *points mutuels*. On reconnaît ce qui suit :

I. — Il y a toujours exactement deux points fixes ; ils séparent chaque paire de points correspondants A et A_1 .

II. — Le nombre des points mutuels *peut* être fini ou infini.

III. — Si A est un point quelconque de C (ni point fixe, ni point mutuel), les points A, A_1, A_2, A_3, \dots , obtenus par la répétition de K , sont tous différents et tendent alternativement vers les points limites

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_{2k} = \alpha, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A_{2k+1} = \alpha_1.$$

Si $\alpha_1 \neq \alpha$, α et α_1 sont des points mutuels ; si $\alpha_1 = \alpha$, α est un point fixe.

Dans la pratique ces points peuvent donc être déterminés par une répétition finie de k . La série de points $A, A_{-1}, A_{-2}, A_{-3}, \dots$ obtenue par la construction inverse K^{-1} conduit à la même conclusion.

Lorsque C est *convexe*, on peut indiquer un grand nombre de ces constructions k . Soit les n points $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ dont un nombre *impair* sont à l'extérieur de C ; on mène AP_1 jusqu'à son deuxième point de coupe $A_{(1)}$ avec C , — $A_{(1)}P_2$ jusqu'à $A_{(2)}$, etc. ; le point $A^{(n)} = A_1$ possède avec A les relations exigées.

On obtient ainsi par exemple, le *théorème* : « Dans chaque courbe convexe (sans angle) on peut inscrire deux polygones

impairs dont les côtés ont des directions données (en particulier, par exemple, une infinité de paires de triangles réguliers).

Les points P^k peuvent être remplacés par des courbes convexes T^k auxquelles on pourra mener des tangentes. De plus ces constructions sont soumises à la transformation dualistique.

4. — M. le prof. C. CAILLER (Genève). — *Sur la Géométrie réglée imaginaire*. — Dans ma communication de Genève, j'ai entretenu la section mathématique de la géométrie des corps solides. De nouvelles recherches dont j'expose les résultats, avec tous les détails nécessaires, dans un mémoire actuellement en cours de publication dans les *Archives* de Genève, m'ont amené récemment à développer, sur l'ensemble du sujet, un point de vue inédit. Je désire en dire un mot aujourd'hui.

D'après cette nouvelle théorie, la géométrie des corps solides se confond avec la stéréométrie ordinaire, quand on prolonge celle-ci dans le domaine complexe. La première géométrie est simplement l'aspect réel de la géométrie ponctuelle imaginaire.

Le *corps solide* est le pendant réel du *point* imaginaire.

Le pendant *réel* du plan imaginaire est la figure qu'on obtient en faisant chavirer un corps solide fixe autour de toutes les droites de l'espace; j'appelle *vrilloïde* l'ensemble ainsi engendré.

Enfin si on fait tourner et glisser un corps solide le long d'un axe fixe, on définit une *vrille*; c'est l'apparence réelle de la *droite* imaginaire.

Les propriétés manifestées par le *corps solide*, le *vrilloïde*, et la *vrille* sont identiques à celles du *point*, du *plan* et de la *droite* de l'espace ordinaire, sauf en ceci que, dans les relations métriques, des quantités complexes se substituent aux quantités réelles. La place me manque pour justifier ici cette assertion. Je veux seulement entrer dans quelques détails touchant la *Géométrie des vrilles*, laquelle représente pour la nouvelle théorie, ce qu'est la géométrie réglée par rapport à l'espace ordinaire.

L'espace réglé est de la quatrième dimension, l'espace vrillé de la huitième. Pour transformer les unes dans les autres toutes les vrilles de l'espace il faut disposer des ∞^{12} mouvements complexes de l'espace imaginaire; les mouvements réels ne transforment une vrille donnée qu'en ∞^6 vrilles nouvelles seulement.

Toute droite possède six coordonnées plückériennes l, m, n, p, q, r , liées entre elles par la relation

$$lp + mq + nr = 0 .$$

Toute vrille possède de même 12 coordonnées plückériennes

$l', l'', m', m'', n', n'', p', p'', q', q'', r', r''$, qui satisfont trois relations homogènes

$$\begin{aligned} l'l'' + m'm'' + r'r'' &= 0 \\ l'p' - l''p'' + m'q' - m''q'' + n'r' - n''r'' &= 0 \\ l'p'' + l''p' + m'q'' + m''q' + n'r'' + n''r' &= 0 \end{aligned}$$

lesquelles restent invariantes dans les ∞^{12} mouvements complexes.

La forme fondamentale, en Géométrie réglée, est le complexe linéaire de Plücker et Chasles, dont l'équation dépend linéairement des coordonnées l, m, n, p, q, r .

De même dans l'espace vrillé, la forme fondamentale, qui fait symétrie au complexe, est une heptasérie, d'équation

$$\begin{aligned} a''l' + a'l'' + b''m' + b'm'' + c''n' + c'n'' + d''p' \\ + d'p'' + e''q' + e'q'' + f''r' + f'r'' = 0 . \end{aligned}$$

L'interprétation géométrique de cette condition est analogue à celle du complexe en Géométrie réglée. Elle est seulement plus compliquée. Au lieu de la *distance* et de l'*angle* qui définissent ensemble l'*intervalle* de deux droites quelconques, une nouvelle notion s'y rencontre : celle des *deux distances conjuguées* qui expriment de même l'intervalle entre deux vrilles.

J'ajoute que si on cherche à déterminer dans l'heptasérie les vrilles qui renferment un corps donné à volonté, les axes de ces vrilles décrivent un complexe linéaire Γ , lequel est ainsi associé d'une part à l'heptasérie, de l'autre au corps donné.

Il existe seulement ∞^4 complexes Γ de cette espèce, la constitution de cette famille de complexes, de second ordre, permet de définir géométriquement toutes les vrilles qui forment l'heptasérie linéaire fondamentale.

5. — M. le prof. F. RUDIO (Zurich), donne un aperçu général de l'état actuel de la *publication des œuvres complètes d'Euler*.

6. — M. le prof.-D^r M. GROSSMANN (Zurich). — *Remarque concernant la théorie générale de la relativité*. — M. Albert Einstein, qui a établi avec MM. Lorentz et Minkowski la théorie de la relativité, vient de mener à bien, d'une manière absolument satisfaisante, la généralisation complète de cette théorie.

Il en résulte maintenant la covariance générale des équations décrivant la marche des phénomènes physiques ainsi que celle des équations différentielles qui déterminent le domaine de la gravitation. Les coordonnées de l'espace et du temps perdent ainsi le dernier reste de leur signification intuitive ; elles se réduisent entièrement à des paramètres servant à la détermination

du point dans l'espace à quatre dimensions dont la géométrie différentielle représente les phénomènes physiques. Le résultat devient encore plus éclatant lorsqu'on le compare aux idées que Riemann développait en 1854 dans son discours inaugural. (Voir l'exposé détaillé de la théorie dans : A. EINSTEIN, *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie* ; chez Joh. Amb. Barth.)

7. — M. le prof.-D^r H. WEYL (Zurich). — *Le problème de l'Analysis situs*. — L'Analysis situs étudie les propriétés dont jouissent les variétés continues indépendamment de toute considération de mesure. On y distingue actuellement deux manières de voir, l'une se rattache à la *Théorie des ensembles* (voir les travaux de Brouwer), l'autre à l'*Analyse combinatoire* (voir l'article Dehn et Heegard dans l'Encyclopédie). Pour illustrer le sens de ces deux méthodes et leurs relations mutuelles, l'orateur reprend le problème spécial de l'Analysis situs qui joue un rôle décisif dans la théorie de Riemann des fonctions algébriques : la détermination du nombre de connexion de variétés fermées à deux dimensions.

Par la décomposition d'une telle variété en un nombre fini de *surfaces élémentaires* surgit un polyèdre (Möbius) ; on décompose encore, pour plus de simplicité, chaque polygone en triangles ; après en avoir désigné chaque sommet par des symboles quelconques, par exemple par des lettres, on peut disposer tous les triangles dont se compose la surface en un tableau où chaque triangle est caractérisé par la donnée de ses trois sommets. On obtient ainsi le « schéma » combinatoire de la surface. Deux schémas proviennent de la même surface par des triangulations différentes s'ils sont « homéomorphes », c'est-à-dire si on peut les ramener tous deux à un même troisième schéma en décomposant encore les deux surfaces. L'homéomorphie est une relation purement combinatoire entre les deux surfaces. Le principal invariant de ces schémas au sens de l'homéomorphie est le nombre de connexion $= k - e - d + 3$ (k = nombre d'arêtes, e = nombre de sommets, d = nombre de triangles) ; pour des surfaces sans anse, ce nombre est 1 (Théorème d'Euler sur les polyèdres).

Mais pour établir rigoureusement que le nombre de connexion ainsi obtenu est un invariant (au sens de l'Analysis situs) de la variété à deux dimensions primitivement obtenue, il faut recourir à des considérations d'un genre tout différent, basées sur les principes de la Théorie des ensembles. Il faut d'abord fixer exactement la notion de variété à deux dimensions ; ensuite, pour obtenir une définition du nombre de connexion indépendante de chaque triangulation, on peut suivre un chemin qui est, dans l'Analysis situs, l'analogue de ce qu'est dans la théorie des fonctions la démonstration utilisée par Weierstrass dans la théorie des intégrales abéliennes : déduire la nature et les relations des

chemins d'intégration de la manière dont les intégrales se comportent.

C'est ce qui fut effectué en détail dans cette communication.

8. — M. le prof. L.-G. DU PASQUIER (Neuchâtel). — *Sur l'arithmétique généralisée.* — Soit une infinité de complexes à n coordonnées tels que (a_0, a_1, \dots, a_n) , où a_0, a_1, \dots, a_n représentent des nombres réels. On érige une arithmétique et une algèbre généralisées portant sur ces éléments en définissant, sur ces complexes, l'égalité et deux opérations qu'on appellera *addition* et *multiplication*, par analogie avec l'arithmétique ordinaire. Ces trois définitions initiales sont arbitraires, ce qui n'empêche pas les opérations qui en résultent d'être soumises à certaines *lois fondamentales*. L'orateur cite les dix lois fondamentales qui caractérisent l'arithmétique et l'algèbre classiques et rappelle le théorème établissant qu'une nouvelle extension du domaine des nombres, au delà des nombres complexes ordinaires, n'est possible qu'au prix de l'abandon d'une ou de plusieurs de ces lois fondamentales. Le développement pris jusqu'ici par l'analyse mathématique montre que les lois d'associativité et de distributivité sont les plus importantes. En maintenant ces lois et laissant tomber seulement la commutativité de la multiplication et l'exclusion des diviseurs de zéro, on arrive aux systèmes des *polytettarions*. Posant entre les coordonnées des tettarions certaines relations appropriées, on obtient d'autres systèmes de nombres hypercomplexes, par exemple les quaternions, comme cas particuliers de certaines classes de polytettarions. *Les tettarions comprennent, comme sous-systèmes, tous les systèmes possibles de nombres hypercomplexes à multiplication associative et distributive.*

Parmi les connexions remarquables entre certaines lois fondamentales régissant les opérations de l'algèbre généralisée, et les propriétés arithmétiques des domaines où ces lois sont valables, citons cette curieuse relation : soit un domaine de nombres hypercomplexes *entiers*, comprenant des complexes *irréductibles*, ou *premiers*, et α un complexe entier non irréductible de ce domaine. On pourra mettre α sous forme d'un produit de facteurs irréductibles, en imposant à ces derniers de se suivre dans un ordre tel que leurs normes suivent un ordre fixé arbitrairement pour les facteurs premiers de la norme $N(\alpha)$ du complexe entier donné α . Cette décomposition de α en facteurs premiers est *plurivoque* ou *unique*, suivant que la multiplication, dans le système envisagé, est commutative ou ne l'est pas.

9. — M. G. PÓLYA (Zurich). — *Un pendant du théorème d'approximation de Liouville dans la théorie des équations différentielles.* — Soit α un nombre irrationnel et soit r_n celui des nombres

rationnels de dénominateur ne dépassant pas n qui est le plus voisin de α ; d'après le théorème de Liouville la suite convergente pour toute valeur de α

$$r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, \dots \quad [1]$$

ne peut pas converger avec une rapidité arbitraire si α satisfait à une équation algébrique à coefficients rationnels.

De même qu'au nombre α correspond la suite [1], on peut faire correspondre à toute fonction entière $f(x)$ la série de Taylor qui converge vers elle. Si $f(x)$ satisfait à une équation différentielle algébrique à coefficients rationnels, la série de Taylor de $f(x)$ ne peut pas converger avec une rapidité arbitraire. Comme la série de Taylor, pour des fonctions entières, converge d'autant plus vite que la valeur absolue de la fonction augmente plus lentement, on peut énoncer aussi le théorème comme suit : Si une fonction entière satisfait à une équation différentielle algébrique, sa valeur absolue ne peut pas croître aussi lentement qu'on voudra.

Le conférencier présume ce théorème, il en pose la démonstration comme problème, toutefois la démonstration est déjà établie sur plusieurs points importants.

En s'appuyant sur des travaux de MM. Hurwitz et Perron, le conférencier a obtenu certains résultats, par exemple :

La fonction entière de x

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} x^n$$

(la moitié d'une série Theta) ne satisfait à aucune équation différentielle algébrique si q est rationnel.

L'équation différentielle

$$x_{m-1} \frac{d^m y}{dx^m} + a_1 x^{m-2} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + a_{m-1} \frac{dy}{dx} - y = 0$$

est irréductible, en ce sens qu'aucune intégrale de cette équation ne satisfait à une équation différentielle linéaire à coefficient rationnel dont le degré soit inférieur à m .

10. — M. le D^r H BERLINER (Berne). — *Deux Géométries projectives naturelles*. — Les deux géométries projectives résultant des systèmes d'abscisses et d'ordonnées angulaires (cfr. Berliner, Actes de la Société helvétique des Sc. nat. 1915, II p. 109, ou *L'Ens. math.*, 1915, p. 354) conduisent à deux géométries naturelles. Si nous définissons en effet la longueur d'un arc d'une courbe comme la limite vers laquelle tend la longueur (au sens de ces géomé-

tries métriques) d'un polygone inscrit dans l'arc de courbe, lorsque ses côtés tendent vers 0, l'abscisse, de même que l'ordonnée angulaire d'un point de la courbe, sera une fonction de la longueur de l'arc. La connaissance de cette fonction suffit pour déterminer la forme (au sens de ces géométries) de la courbe, mais pas sa position dans le plan. En effet, si l'on pose

$$\begin{aligned} A(BCQP) &= (QP)_2 : (QP)_3, B(CAQP) \\ &= (QP)_3 : (QP)_1, C(ABQP) = (QP)_1 : (QP)_2, \end{aligned}$$

on aura

$$(QP)_i = (QP)_1 P_1 P_2)_i \dots (P_{n-1} P_n)_i (P_n P)_i \text{ pour } i = 1, 2, 3;$$

en outre $(QP)_i = \frac{y - z_i}{x - z_i}$ où x et y désignent les abscisses de Q, P ,

dans le système que l'on fait correspondre à QP . Ainsi soit $\tau = \varphi(s)$ une fonction continue donnée; menons par un point P_0 la droite $P_0 P_1$ l'abscisse soit $\varphi(s_0)$ dans le système de P_0 ; ensuite par P_1 la droite $P_1 P_2$ dont l'abscisse soit $\varphi(s_1)$ dans le système de P_1 , si la distance $P_0 P_1 = s_1 - s_0$ (donc si $\varphi(s_0) + s_1 - s_0$ est l'ordonnée de P_1 dans le système de $P_0 P_1$); etc...., enfin par P_{n-1} la droite $P_{n-1} P_n$ dont l'abscisse soit $\varphi(s_{n-1})$ dans le système de P_{n-1} , on aura

$$\begin{aligned} (P_0 P_n)_i &= (P_0 P_1)_i : \dots (P_{n-1} P_n)_i \\ &= \frac{\varphi(s_0) + s_1 - s_0 - z_i}{\varphi(s_0) - z_i} \dots \frac{\varphi(s_{n-1}) + s_n - s_{n-1} - z_i}{\varphi(s_{n-1}) - z_i} \\ &= \prod_{\lambda=0}^{n-1} \left(1 + \frac{\Delta s_\lambda}{\varphi(s_\lambda) - z_i} \right), \end{aligned}$$

Faisons tendre tous les Δs_λ vers 0 en même temps que leur nombre tend vers ∞ , de sorte que $\sum \Delta s_\lambda = s - s_0$; on aura

$$(P_0 P_s)_i = \lim_{\Delta s=0} \prod_{s_0}^s \left(1 + \frac{\Delta s}{\varphi(s) - z_i} \right) = \lim_{\Delta s=0} e^{\sum_{s_0}^s \frac{\Delta s}{\varphi(s) - z_i}} = e^{\int_{s_0}^s \frac{ds}{\varphi(s) - z_i}} \quad (1)$$

or $e^x \geq 1 + x \geq e^{x-x^2}$ pour $|x| < \sqrt{2} - 1$ (notamment $e^{x-x^2} = 1 + x - \frac{x^2}{2} [2 - (1-x)^2 e^{\theta x(1-x)}]$, où $0 < \theta < 1$), donc

$$e^{\sum_{s_0}^s \frac{\Delta s}{\varphi(s) - z_i}} \geq \prod_{s_0}^s \left(1 + \frac{\Delta s}{\varphi(s) - z_i} \right) \\ \geq e^{\sum_{s_0}^s \frac{\Delta s}{\varphi(s) - z_i} - \sum_{s_0}^s \left(\frac{\Delta s}{\varphi(s) - z_i} \right)^2} \text{ et } \lim_{\Delta s = 0} \sum_{s_0}^s \left(\frac{\Delta s}{\varphi(s) - z_i} \right)^2 = 0.$$

Les sommets d'un polygone ainsi construit, dont les côtés dendent vers 0 remplissent une courbe passant par P_0 , l'abscisse de chacun de ses points P_s est donnée par $\tau = \varphi(s)$; (ainsi $s - s_0$ donne la longueur du polygone et par là, comme on peut voir facilement la longueur de l'arc de P_0 à P_s), et tout arc quelconque peut être construit grâce à 1). Si $\tau = \varphi(s)$ ne donne pas l'abscisse mais l'ordonnée angulaire du point de la courbe, on trouve d'une manière analogue 2)

$$(P_0 P_s)_i = e^{\int_{s_0}^s \frac{ds}{\cos^2 \varphi(s) [\operatorname{tg} \varphi(s) - \operatorname{tg} z_i]}} \quad i = 1, 2, 3).$$

Aussi bien dans la géométrie des abscisses que dans la géométrie des ordonnées angulaires $\tau = \varphi(s)$ est une *équation naturelle* de la courbe.

11. — M^{me} Grace-Chisholm Young (Lausanne). — L'année passée, à l'occasion de la conférence de M^{me} Young sur les courbes sans tangentes, M. Raoul Pictet a raconté que M. Cellérier lui avait parlé vers 1860 d'une courbe sans tangente que celui-ci avait construite. Un mémoire de Cellérier existe à ce sujet, et a paru après la mort de l'auteur dans le Bulletin de M. Darboux (1890). Il reste incertain si la courbe de Cellérier est antérieure à celle de Weierstrass ou *vice versa*. En tout cas les deux semblent être indépendantes. Après avoir parcouru le mémoire de Cellérier, M^{me} Young constate avec le plus grand intérêt que la courbe de Cellérier est une courbe sans tangentes dans le sens le plus large. Elle n'a pas de tangentes, ni ordinaires ni singulières.

La méthode de démonstration de Cellérier est tout à fait originale et d'une exactitude irréprochable. Comme Weierstrass il n'envisage pas la question du point de vue géométrique, et la question de tangentes singulières n'entre pas dans les recherches

ni de l'un ni de l'autre. Mais la méthode de Weierstrass est moins profonde que celle de Cellérier; cette dernière suffit sans recherches ultérieures à trancher la question proposée.

12. — M. W. H. YOUNG et M^{me} YOUNG (Lausanne). — *La structure des fonctions à plusieurs variables.* — Le sujet de cette conférence est une généralisation pour plusieurs variables du remarquable théorème donné par M. Young à la séance de la British Association, à Leicester en 1907, d'après lequel les limites supérieures et inférieures d'indétermination $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ de $f(x+h)$, où h est positif et s'approche de zéro, sont les mêmes que celles de $f(x-h)$, sauf dans un ensemble dénombrable de points. On exprime brièvement ce résultat en disant, qu'il y a symétrie à droite et à gauche, sauf dans un ensemble dénombrable de points.

Dans le plan, et dans n dimensions, nous trouvons aussi en général qu'une fonction quelconque possède une structure, pour ainsi dire cristalline, en vertu du théorème suivant :

Si $f(x, y)$ est une fonction quelconque de (x, y) , il y a symétrie complète autour du point (x, y) par rapport aux limites supérieures ($\varphi_{++}, \varphi_{+-}, \varphi_{-+}, \varphi_{--}$) et inférieures ($\psi_{++}, \psi_{+-}, \psi_{-+}, \psi_{--}$) d'indétermination de $f(x \pm h, y \pm k)$ sauf pour des points tout à fait exceptionnels. Ces points gisent sur un ensemble dénombrable de courbes monotones, et forment en conséquence un ensemble simple de mesure nulle.

Pour une fonction de n variables l'ensemble exceptionnel est toujours de mesure nulle, et git sur un ensemble dénombrable de variétés de $(n-1)$ dimensions.

Ce théorème gagne en intérêt lorsqu'on le précise davantage. Si les φ 's par exemple, ne sont pas tous égaux, on peut distinguer les cas suivants :

I) *Un des φ 's est plus grand que chacun des autres (ensemble dénombrable);*

II) *Deux des φ 's sont égaux et plus grands que chacun des autres (dénombrable);*

III) *Deux des φ 's sont égaux et les deux autres sont égaux;*

a) *il y a symétrie latérale*

$$(\varphi_{++} = \varphi_{-+}, \varphi_{+-} = \varphi_{-+}) \text{ ou } (\varphi_{++} = \varphi_{+-}, \varphi_{-+} = \varphi_{--});$$

b) *il y a manque complet de symétrie latérale*

$$(\varphi_{++} = \varphi_{--}, \varphi_{+-} = \varphi_{-+});$$

IV) *Trois des φ 's sont égaux et plus petits que le dernier.*

Les cas IIIb et IV correspondent au cas général de notre théo-

rème. Le cas IIIa est particulièrement intéressant et caractéristique pour notre système de coordonnées :

Les points où il y a symétrie à droite et à gauche gisent sur un ensemble dénombrable de lignes horizontales, et ceux où il y a symétrie au-dessus et au-dessous sur un ensemble dénombrable de lignes verticales.

On voit clairement à présent les divers cas dans l'espace à n dimensions. La méthode de démonstration dépend du fait que chaque fois qu'on a deux φ 's différant par une quantité plus grande que c , où c est fixe, le point x n'est pas un point limite de points du même genre dans le quadrant correspondant au plus petit des deux φ 's. Attaché au point x on aura donc un petit « drapeau » dans l'intérieur duquel, au sens étroit, il n'y aura pas de points de l'ensemble. Il s'agit de démontrer que les ensembles de points avec un, deux ou trois « drapeaux » par point, ont certaines propriétés. En particulier *les ensembles à trois « drapeaux » sont dénombrables.*

13. — M. le prof. Dr W.-H. YOUNG, F. R. S. (Lausanne). — *Les intégrales multiples et les séries de Fourier.* — Le conférencier présente d'abord quelques remarques préliminaires sur sa méthode de développer la théorie de l'intégration simple¹.

1. *La méthode s'applique également quand l'intégration est ordinaire, ou par rapport à une fonction à variation bornée, soit continue soit discontinue.*

2. *Elle s'applique également quand l'intégration est multiple; ici on remarquera que l'intégration peut être par rapport à une fonction $g(x, y, \dots)$ à variation bornée, continue ou discontinue, et que l'intégration ordinaire en est un cas spécial, la fonction par rapport à laquelle l'intégration se fait étant par exemple xy , quand il s'agit d'intégration double ordinaire.*

3. *Dans cet exposé de la théorie il n'est pas nécessaire de recourir à une perspective illimitée de suites monotones, refoulant de cette manière — comme on pourrait prétendre — les vraies difficultés, sans les surmonter. Il s'agit seulement de définir exactement les intégrales des fonctions semi-continues de M. Baire, qui sont précisément les intégrales par excès et par défaut de M. Darboux — et d'appliquer ensuite le théorème suivant :*

L'intégrale d'une fonction $f(x)$ est en même temps la borne supérieure des intégrales des fonctions semi-continues supérieurement plus petites que $f(x)$, et la borne inférieure des intégrales des fonctions semi-continues inférieurement plus grandes que $f(x)$ ².

4. *La méthode n'exige pas une connaissance préalable de la théorie des ensembles et en particulier de la théorie de la mesure ;*

Le conférencier définit la mesure en second lieu, comme un genre spécial d'intégrale. L'avantage du point de vue logique, même quand l'intégration est ordinaire, est que le traitement est uniforme. En effet, pour traiter les ensembles de points en général, sans rester seulement parmi les ensembles

¹ Voir dans l'Ens. math. les comptes rendus des séances tenues à Genève (1915) et à Frauenfeld (1916).

² Paris, Comptes rendus, t. 162, p. 909, séance du 13 juin 1916.

élémentaires, dénombrables, ou fermés, il faut précisément procéder par la méthode des suites monotones. La définition de la mesure en général n'est pas justifiée sans l'emploi d'un raisonnement identique à celui que le conférencier adopte dans sa théorie de l'intégration. Dans le traitement de cette dernière théorie fondé sur la mesure, au contraire, on suppose toutes les difficultés concernant la mesure surmontées, et on recommence par une définition toute différente de l'intégrale. Par ce fait le manque de logique est en quelque sorte voilé.

Mais quand l'intégration n'est pas ordinaire, l'avantage de la nouvelle méthode saute aux yeux. Une définition préalable de la mesure d'un ensemble de points par rapport à une fonction à variation bornée serait artificielle et privée de toute signification géométrique.

D'un autre point de vue, on se demande pourquoi définir d'abord, et d'une manière géométrique, les intégrales des fonctions à deux valeurs — c'est-à-dire la mesure — pour en déduire les intégrales des fonctions générales ? Les fonctions à deux valeurs ne sont pas plus élémentaires que les autres. La complexité d'une fonction ne dépend pas des nombres de valeurs qu'elle prend. Les fonctions les plus employées prennent en effet toutes les valeurs entre leurs bornes supérieures et inférieures. C'est le nombre des limites nécessaires pour définir et exprimer une fonction qui en détermine la place dans l'armée des fonctions, et ceci ne dépend guère du nombre des valeurs qu'elle prend.

Après ces remarques préliminaires le conférencier passe à la considération de l'intégrale multiple

$$\int f(x, y, z, \dots) dg(x, y, z, \dots) .$$

Il rappelle la définition de Stieltjes, étendue, comme elle peut évidemment être, à plusieurs variables. Dans le plan, par exemple, nous divisons le rectangle $(0, 0; a, b)$ en plusieurs petits rectangles $(x, y; x + h, y + k)$. Par rapport à chacun de ceux-ci, nous formons le terme $f(\xi, \eta) g(x, y)$, où

$$\begin{aligned} \Delta g(x, y) &= \left[g \right]_{x, y}^{x+h, y+k} \\ &= g(x+h, y+k) - g(x, y+k) - g(x+h, y) + g(x, y) . \end{aligned}$$

Nous faisons la somme de ces termes ; c'est la somme approximative de l'intégrale ; puis nous passons à la limite de la manière habituelle dans la définition de l'intégrale,

$$\int f(x, y) dg(x, y) = \lim \Sigma f(\xi, \eta) \Delta g(x, y) .$$

Ici $f(x, y)$ est continue. Si elle est semi-continue supérieure, elle est la limite d'une suite monotone non-croissante de fonctions continues, dont les intégrales, ainsi définies, ont pour

limite l'intégrale de f , par définition. Si nous préférons, nous pouvons donner une autre définition, qui cependant revient au même. On remplace $f(\xi, \eta)$ dans la somme approximative par la borne supérieure de f dans le petit rectangle. La limite obtenue sera donc l'intégrale par excès de M. Darboux, et sera, selon le conférencier, l'intégrale de la fonction semi-continue supérieurement $f(x, y)$.

Dans la formule il faut supposer les périmètres des rectangles construits de manière à ne pas passer par aucun point de discontinuité de la fonction g . Ceci est possible en vertu du théorème que *ces points de discontinuité gisent sur un ensemble dénombrable de parallèles aux axes*. Si l'on préfère ne pas éviter ces points, on peut modifier légèrement la formule approximative comme dans le cas d'une variable.

On définit d'une manière analogue l'intégrale d'une fonction semi-continue inférieurement. Enfin l'intégrale d'une fonction γ générale est la borne supérieure des intégrales des fonctions semi-continues supérieurement plus petites que f , et en même temps la borne inférieure des intégrales des fonctions semi-continues inférieurement plus grandes que f . Ces bornes coïncident en effet pour chaque fonction f bornée, définie par n'importe quel procédé mathématique, et pour chaque fonction non-bornée ayant par rapport à g une intégrale qui est absolument convergente.

Par moyen de la table suivante le conférencier donne des formules qui permettent d'exprimer les intégrales doubles d'une manière plus familière, en employant des intégrales répétées. Dans le domaine de l'intégration ordinaire les deux notions d'*intégrale multiple* et d'*intégrale répétée* sont identiques. Elles le sont toutes les fois que la fonction g est le produit d'une fonction de x par une fonction de y . Mais quand g n'est pas de cette nature, les théorèmes donnés ont une importance capitale.

Si

$$g = \int \varphi(x, y) d(xy), \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{0,0}^{a,b} f(x, y) dg(x, y) = \int_{0,0}^{a,b} f(x, y) \varphi(x, y) d(xy). \end{array} \right.$$

$$g = \int \varphi(x, y) ds(x, y), \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{0,0}^{a,b} f(x, y) dg(x, y) = \int_{0,0}^{a,b} f(x, y) \varphi(x, y) ds(x, y). \end{array} \right.$$

$$g = \int \frac{dg(x, y)}{dx} dx \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{0,0}^{a,b} f(x, y) dg(x, y) = \int_0^a dx \int_0^b f d \left\{ \frac{dg}{dx} \right\}. \\ \text{où } \frac{dg}{dx}, \text{ un des nombres dérivés de } g(x, y), \text{ est} \\ \text{une fonction monotone.} \end{array} \right.$$

est une fonction monotone non-décroissante.

$$F = \int f(x, y) dx \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{0,0}^{a,b} F(x, y) dg(x, y) = \int_{y=0}^b \left[F dg \right]_{x=0}^a \\ - \int_0^a dx \int_0^b \frac{dF}{dx} dg(x, y). \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} F = \int f(x, y) dx \\ G = \int g(x, y) dy \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{0,0}^{a,b} F(x, y) dG(x, y) = \int_{y=0}^b \left[F \frac{dG}{dy} \right]_{x=0}^a dy. \end{array} \right.$$

$$\Phi = \int_{0,0}^{x,y} f(x, y) d(x, y) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{0,0}^{a,b} \Phi(x, y) dg(x, y) = \left[fg \right]_{0,0}^{a,b} \\ - \int_{x=0}^a \left[\frac{d\Phi}{dx} g(x, y) \right]_{y=0}^b dx \\ \left\{ \frac{d}{dx} \int_{0,0}^{x,y} f(x, y) dg(x, y) = \int_0^y f(x, y) d \left\{ \frac{dg}{dx} \right\} \right. \end{array} \right.$$

Théorème de l'intégration par parties : —

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{0,0}^{a,b} g(x, y) df(x, y) = \left[fg \right]_{0,0}^{a,b} - \int_0^a \left[fdg \right]_{y=0}^b \\ - \int_0^b \left[fdg \right]_{x=0}^a + \int_{0,0}^{a,b} fdg. \end{array} \right.$$

Théorème de la moyenne, type Ossian Bonnet.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } g(x, y, \dots) \text{ et tous} \\ \text{ses increments sont} \\ \geq 0, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \int_{0,0,\dots,0}^{a,b,\dots} fg d(xy, \dots) = g(a, b, \dots) \int_{X, Y, \dots}^{a,b,\dots} fd(xy, \dots) \\ \text{où } (X, Y, \dots) \text{ est un certain point du « rectangle »} \\ (0, 0, \dots; a, b, \dots). \end{array}$$

Quant aux applications à la théorie des séries de Fourier, le conférencier se borne à citer ses nouveaux résultats dans le cas d'une variable et fait remarquer qu'il n'en a trouvé aucun qui ne puisse être étendu à n variables. On peut citer les cas suivants :

I. La série de Fourier de $f(x)$ converge au point x , si

$$\frac{1}{u} \int |d(u(f(x+u) + f(x-u)))|$$

est bornée.

II. La série alliée de la série de Fourier de $f(x)$ converge au point x , si

$$\frac{1}{u} \int |d(u(f(x+u) - f(x-u)))|$$

est bornée, et

$$\lim_{s=0} \int_{\varepsilon}^{\pi} (f(x+u) - f(x-u)) \cot \frac{1}{2} u \, du$$

existe.

III. Si $f(+0)$ et $f(-0)$ existent,

$$\lim_{n=\infty} n a_n = 0, \quad \lim_{n=\infty} n b_n = \frac{1}{\pi} (f(+0) - f(-0))$$

quand la limite est prise à la manière de Cesàro, index $(1+k)$, $0 < k$.

14. — O. BLOCH (Berne). — *Sur la géométrie dans le plan d'une variable complexe.* — Des problèmes électrotechniques ont conduit l'auteur à la considération de fonctions rationnelles de la forme

$$V = \frac{A + Bv + Cv^2 + \dots + Mv^m}{D + Ev + Fv^2 + \dots + Nv^n}$$

dans lesquelles v désigne un paramètre réel, A, B, C, etc., des constantes quelconques, complexes ou réelles. V est ainsi une complexe variable dont la représentation géométrique dans le plan de Gauss est une courbe unicursale.

L'auteur développe quelques-uns des résultats de ses recherches, entre autres les suivants : l'expression $V = \frac{A + Bv + Cv^2}{D + Ev + Fv^2}$ représente quand les six coefficients sont complexes, une quartique bi-circulaire dans une position quelconque ; quand les trois coefficients du numérateur sont seuls réels, on obtient une de ces quartiques avec un point double à l'origine. Si, dans l'un des deux cas précédents, $F = 0$, la quartique se change en une cubique circulaire. Quand A, B, C sont complexes, D, E, F réels, l'équation précédente représente une conique générale ; si $C = 0$, la conique passe par l'origine. On obtient facilement les équations des limaçons de Pascal et les équations focales des coniques. La discussion des équations conduit à des modes nouveaux de génération de courbes connues et aussi à des courbes nouvelles.

Les différentes courbes unicursales représentées sont différenciées par le nombre plus ou moins grand des termes au numérateur et au dénominateur de V et par la nature (complexe ou réelle) des coefficients. Les expressions V avec quatre termes au numérateur et au dénominateur donnent déjà 255 combinaisons différentes. Chacune d'elles représente un groupe de courbes renfer-

mant un plus ou moins grand nombre de cas particuliers. Ainsi l'expression $V = \frac{A + i(A + C)v + Cv^2}{1 + iv}$, où A et C sont complexes, est l'équation de la strophoïde droite en position quelconque ; celle-ci se présente comme un cas particulier d'une cubique circulaire. Il peut aussi arriver que des expressions différentes donnent la même courbe.

L'auteur renvoie pour plus de détails et, en particulier, pour le traitement des problèmes fondamentaux de la géométrie analytique (problèmes d'intersection, de tangentes, etc.), concernant ces courbes, à un travail paru dans la *Schweiz. Bauzeitung* (LXVIII, nos 21 et 22) et à une publication qui paraîtra prochainement sous le titre *Ortskurven der graphischen Wechselstromtechnik*, chez Rascher & C^{ie}, à Zurich.

Nouvelles diverses. — Nominations.

Etats-Unis. — Les mathématiciens américains se sont réunis à New-York du 27 au 30 décembre 1916. Les deux premières journées ont été réservées à la 23^e réunion annuelle de la Société mathématique américaine (*American mathematical Society*), présidée par M. E. W. BROWN. Plus de 130 membres, sur 732 que compte la Société, ont pris part aux séances. M. L. E. DICKSON a été appelé à la présidence pour 1917.

Les deux journées suivantes ont été consacrées à la 2^e réunion annuelle de la *Mathematical Association of America*, qui s'occupe plus particulièrement des questions de l'enseignement des mathématiques. M. FL. CAJORI a été élu président pour 1917.

France. — *Académie des Sciences.* M. Emile PICARD a été élu secrétaire perpétuel, pour les sciences mathématiques et physiques, en remplacement de Gaston Darboux. Né à Paris le 24 juillet 1856, M. Picard fait partie de l'Académie des Sciences depuis le 11 novembre 1889 où il a succédé à Halphen.

Suisse. — M. A. SPEISER a été nommé professeur de mathématiques à l'Université de Zurich.

Nécrologie.

Nous avons le regret d'apprendre la mort du général BASSOT, membre de l'Académie des Sciences de Paris et du Bureau des longitudes, décédé à l'âge de soixante-treize ans.

H. DUFUMIER. — La *Revue de Métaphysique et de Morale* (n^o de janvier 1917) annonce la mort de son jeune collaborateur, le capitaine Henri DUFUMIER, tombé au champ d'honneur. « C'est une