

# BIBLIOGRAPHIE

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1917)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## BIBLIOGRAPHIE

---

**Annuaire pour l'an 1917**, publié par le Bureau des Longitudes. — 1 vol. in-16 de près de 700 p., avec 11 fig., 5 cartes en couleurs et 2 portraits; 2 fr.; Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>, Paris.

L'Annuaire du Bureau des Longitudes pour l'année 1917, si précieux par le nombre des documents qu'il contient, vient de paraître. Cet excellent Recueil renferme cette année, après les documents astronomiques, des Tableaux relatifs à la Métrologie et à la Météorologie.

Cet Ouvrage ne se trouvera pas seulement sur la table du technicien, du physicien, du mathématicien; chacun voudra le consulter pour avoir sous les yeux la liste des constantes usuelles, et aussi pour lire les intéressantes Notices de cette année: *Le calendrier babylonien*, par G. BIGOURDAN; *L'avance de l'heure légale pendant l'été de l'année 1916*, par J. RENAUD; *La détermination du Mètre en longueurs d'ondes lumineuses*, par M. HAMY.

Dr B. GONGGRIJP. — **Logarithmische en Goniometrische Tafels en Bijtafels.** — 1 vol. in-8° de 230 pages; 1 fl. 70; P. Noordhoff, Groningen, 1916.

Ces nouvelles tables sont divisées en plusieurs parties. La première donne, avec cinq décimales, les logarithmes des nombres ordinaires jusqu'à 10,800. Pour les 800 derniers nombres les logarithmes ont même six décimales. Les nombres sont présentés par groupes de 10 dont on a les logarithmes sur une même ligne horizontale. Par exemple on lit

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
491	<b>69</b>	108	117	126	135	144	152	161	170	179	188

ce qui indique que le logarithme de 4910 a 69108 pour mantisse. Pour 4911, 4912,... les mantisses sont respectivement 69117, 69126,...

Cette disposition est appuyée d'une très grande clarté matérielle, d'une très grande correction typographique. Il n'y a ainsi que 1080 lignes à manier. Les différences se lisent très clairement dans le sens horizontal comme on peut d'ailleurs s'en convaincre sur la ligne ici transcrite.

La seconde partie est consacrée à la trigonométrie. Elle donne les logarithmes des sinus, tangentes, cotangentes, cosinus de tous les arcs pris de minute en minute.

Les procédés d'interpolation sont variés. Pour les deux premiers degrés nous retrouvons celui employé dans les tables françaises de J. Houël. On réduit le petit arc en secondes; on cherche, dans la première partie, le logarithme de ce nombre de secondes et on y ajoute le logarithme du rap-

port du sinus ou de la tangente à l'arc ainsi évalué. Ce logarithme de rapport est donné en bas de page.

Pour les trois degrés suivants, les interpolations peuvent se faire sans procédé spécial mais comme elles sont assez laborieuses, des tableaux d'interpolation forment des pages spéciales respectivement situées à gauche des six pages consacrées aux six demi-degrés considérés.

Les « Bijtafels » sont des tables auxiliaires extrêmement pratiques. La première, A, est une table très condensée d'antilogarithmes. B donne les carrés, cubes, racines et inverses pour les nombres de 1 à 100. C est d'une disposition très ingénieuse pour donner les longueurs d'arcs de cercle composés de degrés, minutes, secondes. D donne les logarithmes de  $1 + r$  pour les calculs financiers. E se rapporte aux constantes usuelles. F et G convertissent les logarithmes ordinaires en logarithmes népériens et réciproquement. H donne les valeurs de

$$2 \sin \frac{a}{2} , 2 \operatorname{tang} \frac{a}{2} ,$$

les arcs  $a$  étant situés dans les deux premiers quadrants et exprimés en degrés.

Enfin des tables donnent les valeurs naturelles des sinus, tangentes, cotangentes, cosinus pour tous les arcs du premier quadrant pris de minute en minute. Pour les arcs inférieurs à 6 degrés, un appendice assure toujours cinq chiffres *significatifs*.

L'ensemble de tout ceci constitue un beau recueil d'une perfection matérielle au-dessus de tout éloge. A. BUHL (Toulouse).

P. WIJDENES. — **Logarithmen en Rentetafels.** — 1 vol. in-8° de 64 pages, 0 fl. 50 ; Groningen, P. Noordhoff, Groningen 1916.

Ces tables constituent un complément de celles du Dr B. Gonggrijp, complément adapté aux problèmes financiers. On retrouve d'abord la table de logarithmes pour les entiers de 1 à 10,800.

Viennent ensuite les puissances de  $(1 + r)^n$  où  $r$  varie par demi-centièmes de 0,02 à 0,06 alors que  $n$  varie, par valeurs entières, de 1 à 35. Puis viennent des résultats analogues pour  $n$  négatif. Les tables suivantes sont consacrées à

$$\Sigma (1 + r)^n = (1 + r) + (1 + r)^2 + \dots + (1 + r)^n$$

puis à des sommes analogues, où  $n$  est négatif, et aux inverses de ces sommes, pour les valeurs de  $r$  et de  $n$  déjà indiquées. Signalons encore un petit tableau pour les racines douzièmes des puissances de  $1 + r$  et nous aurons évidemment tout ce qui est nécessaire pour le calcul rapide des intérêts composés, annuités et quantités connexes. L'œuvre est de même facture que celle de M. B. Gonggrijp. A. BUHL (Toulouse).

Aug. FÖPPL. — **Vorlesungen über technische Mechanik.** In sechs Bänden.

Erster Band : Einführung in die Mechanik. 5. Auflage. — 1 vol. in-8° ; 431 p., 104 fig. ; relié, 10 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Il nous suffira évidemment de signaler brièvement cette nouvelle édition du tome I du traité de mécanique technique de M. Föppl. Sauf de légères modifications de détails elle est conforme à la 4<sup>me</sup> édition.

Ce premier volume a pour objet l'introduction à la mécanique technique. Il contient tout ce qui dans une première étude est indispensable aux élèves-ingénieurs :

I. Mécanique du point matériel. — II. Mécanique du corps solide. — III. Théorie du centre de gravité. — IV. Transformation de l'énergie. — V. Le frottement. — VI. Elasticité et résistance. — VII. Le choc. — VIII. Mécanique des corps fluides.

L'Ouvrage correspond aux leçons que professe l'auteur à l'Ecole technique supérieure de Munich. C'est sans doute le traité de mécanique technique le plus répandu à l'heure actuelle dans les pays de langue allemande.

J. HADAMARD. — **Fours Lectures on Mathematics**. A course of lectures delivered at Columbia University in 1911. [Publications of the Ernest Kempton Adams Fund for physical research. Nr. 5] — 1 fasc. in-4° 53 p, \$ 0,75; New-York, Columbia University Press, 1915.

Ce livre contient la série des quatre leçons en langue anglaise que M. Hadamard a données en 1911 à l'Université Columbia (New-York). En voici les titres :

I. La définition des solutions d'une équation aux dérivées partielles par des conditions à la frontière.

II. Recherches contemporaines sur les équations différentielles, les équations intégrales et intégréo-différentielles.

III. L'analysis situs en relation avec les correspondances et les équations différentielles.

IV. Solutions élémentaires des équations aux dérivées partielles et fonctions de Green.

La lecture de ces leçons sera des plus suggestives pour le lecteur quelque peu familiarisé avec ces théories. Il y trouvera non point un exposé systématique, mais une série de remarques de caractère général appuyées sur des exemples particuliers heureusement choisis.

M. PLANCHEREL (Fribourg).

J. GRIALOU. — **Cours d'Hydraulique**, professé à l'Ecole centrale de Lyon. — 1 vol. in-8° de VI-550 pages et 240 figures; 20 fr.; Gauthier-Villars, Paris, 1916.

Ce cours d'Hydraulique se présente sous un aspect véritablement original. Il est aussi scientifique que possible et, même dans le cas où il a fallu descendre des équations analytiques vers les résultats empiriques, la transition conserve le caractère d'une application qui pourra guider les progrès futurs de la théorie. Nombreuses sont les questions traitées. Contentons-nous d'indiquer les plus saillantes, surtout au point de vue mathématique.

L'Hydrostatique est devenue une science élémentaire à laquelle on peut donner une allure purement géométrique. Les centres de pression, le principe de Pascal donnent d'élégants et faciles calculs. Du liquide en rotation parabolique autour d'un axe vertical, nous passons à la rotation circulaire autour d'un axe horizontal; c'est un cas traité moins souvent. Ce sont le principe d'Archimède et les corps flottants qui donnent la note géométrique. La formule barométrique donne celle des calculs pratiques.



Les équations générales de l'hydrodynamique sont établies avec soin. L'une de leurs conclusions immédiates est le théorème de Bernoulli

$$z + \frac{p}{\pi} + \frac{V^2}{2g} = H = \text{const.}$$

Pour le cas de fluides élastiques, à température variable ou non, il admet des variantes qui lui sont immédiatement rattachées. Il est aussi d'une signification géométrique vérifiable par des expériences piézométriques très simples. On peut déjà en tirer une théorie de l'écoulement des liquides par les orifices. L'auteur s'élève ici contre des idées fausses, attribuant aux veines issues d'orifices en mince paroi des formes non tangentielles à la paroi ; il est curieux qu'il faille redresser de telles erreurs car on ne voit pas, au simple point de vue de la continuité, comment une molécule, voisine de la paroi et se disposant à sortir, pourrait présenter tout à coup un point anguleux dans sa trajectoire. Les sections variables d'une même veine, à des distances diverses de l'orifice, forment aussi un sujet d'étude des plus surprenants. Le théorème de Bernoulli, combiné avec certains résultats expérimentaux de Borda, donne différentes formes de celui de Bélanger pour l'écoulement s'effectuant d'une conduite à une autre conduite de section différente. La variation de charge peut cependant donner lieu à une véritable analyse poussée assez loin moyennant des équations linéaires dont l'une est intégrable, non sans élégance, par les fonctions de Bessel.

Les ajutages et déversoirs ont des théories plutôt empiriques, mais, pour le déversoir en mince paroi, nous voyons cependant les conséquences très nettes d'une hypothèse concernant le maximum du débit.

Les tuyaux de conduite sont naturellement traités dans un très important chapitre ; le frottement est ici impossible à négliger et malheureusement on est encore réduit à des hypothèses expérimentales. Les rôles de l'élasticité des parois, des poches d'air, donnent cependant lieu à des calculs et à des schèmes d'une fort intéressante variété et, contrairement à ce que l'on pourrait croire, il reste encore beaucoup d'intérêt pour le cas où le fluide en circulation est un gaz. La fin du chapitre nous révèle une analyse fort élémentaire pour l'obtention d'une formule, due à M. Haton de la Goupillière, et concernant le temps de remplissage d'un réservoir communiquant avec un autre de capacité indéfinie.

L'écoulement dans les canaux et rivières, si l'on y considère, comme fonction à étudier, la vitesse en un certain point d'une section transversale, conduit à des équations aux dérivées partielles analogues à celles qui se rencontrent dans des régions assez diverses de la Physique mathématique. On peut y satisfaire par des solutions trigonométriques et exponentielles. La théorie du remous provoqué par un barrage dépend d'une équation différentielle qui, au moins dans le cas du canal rectangulaire, donne lieu à de simples intégrations de fractions rationnelles.

La résistance des fluides au mouvement des solides n'est point riche en formules mathématiques, du moins dans des cas tant soit peu généraux, mais les hélices aquatiques et aériennes, les parties planantes des avions ont exigé des résultats dont l'intérêt pratique existe forcément.

Les mouvements ondulatoires des liquides (houle, clapotis,...) se prêtent à une analyse élégante due à Cauchy. Les ondes simples, correspondant aux solutions trigonométriques des équations aux dérivées partielles, y jouent

un rôle capital. Se rattachent à cette question les oscillations pendulaires dans les tubes en U, complètement ramenées, pour les petites oscillations, aux équations différentielles habituelles possédant ou non un terme amortissant suivant qu'on veut ou non tenir compte du frottement.

Les récepteurs hydrauliques sont des roues ou des turbines ; un profane pourrait voir dans les roues des appareils primitifs et grossiers, ce en quoi il se tromperait fort. Pour prendre l'eau sans choc et la rendre sans vitesse, tout en la conservant entre les aubes entre les deux instants, des dispositifs fort ingénieux ont été réalisés. Pour les turbines l'esprit géométrique semble les avoir conçues bien avant d'y être poussé par les nécessités industrielles. Les turbines dites parallèles, parce que les filets fluides qui les traversent restent à une distance constante de l'axe, sont dues, en principe, à Euler ! Elles sont encore plus variées que les roues ; elles peuvent être réversibles c'est-à-dire employées à refouler l'eau (pompes centrifuges).

Pour les roues et turbines la question capitale est celle du rendement et c'est surtout le théorème des forces vives qui revient sous des aspects variés. Beaucoup d'élégance, beaucoup de figures claires et suggestives.

Les machines à élévation sont d'abord les pompes plus ou moins antiques ; leur théorie est très élémentaire. Mais il faut leur adjoindre les béliers hydrauliques à caractère presque paradoxal ; ils utilisent le bref instant d'un *coup de bélier* pour élever une colonne d'eau dont le poids ferme ensuite une soupape l'empêchant de redescendre. La première idée des appareils de ce genre est due à Montgolfier.

L'ouvrage va maintenant se terminer par quelques chapitres d'un caractère plus analytique mais d'une irréprochable symétrie. La symétrie matérielle des roues, turbines, etc., doit naturellement appeler souvent un emploi de coordonnées polaires, c'est-à-dire, dans l'espace, de coordonnées semi-polaires ou cylindriques. Les équations fondamentales admettent alors des transformations remarquables propres à mettre en évidence des résultats qui n'apparaîtraient que plus difficilement en coordonnées ordinaires. Pour les cloisons directrices des turbines j'aperçois ainsi tantôt des spirales logarithmiques, tantôt des courbes paraboliques très simples.

Dans une étude sur le mouvement des liquides parfaits nous revenons sur les équations générales parmi lesquelles, dans le cas d'un potentiel des vitesses, se trouve l'équation de Laplace. On peut satisfaire à ces équations au moyen de solutions à la Cauchy ; ce résultat bien connu a été réappliqué ici, de manière systématique, à divers problèmes d'écoulement. Je signale surtout l'écoulement en vase circulaire à niveau constant par orifice circulaire situé à la base ; l'emploi des coordonnées cylindriques est particulièrement approprié car il suffit de savoir ce qui se passe dans une tranche méridienne.

Enfin, pour les liquides visqueux, l'auteur écrit les équations générales, les réduit pour le cas de la seule pesanteur, examine le mouvement permanent et aboutit aux équations d'Helmholtz. Il essaie des solutions élémentaires dans la théorie du remous, dans celle du déversoir en mince paroi, où il arrive notamment, pour les lignes de courant, à une équation différentielle ordinaire facilement intégrable. Il exprime ensuite le débit par deux intégrales différentes dont il établit l'équivalence.

Il termine par le mouvement noyé d'une plaque mince rectangulaire ; là encore je remarque une équation différentielle facilement intégrable pour l'obtention des lignes de courant.

Bien d'autres choses seraient à citer dans cet excellent ouvrage de facture hautement scientifique. L'Hydraulique n'y apparaît pas comme un recueil de formules empiriques. Euler et Montgolfier ont été séduits par ses attraits et M. J. Grialou nous montre que ceux-ci n'ont pu qu'augmenter à la clarté des méthodes de la science moderne. A. BUHL (Toulouse).

G. A. MILLER, H. F. BLICHFELDT et L. E. DICKSON. — **Theory and Applications of finite Groups.** — 1 vol. in-8°, relié, 390 p. ; 4 doll. ; John Wiley & Sons, New-York.

Cet Ouvrage est dédié à l'auteur du *Traité des substitutions et des équations algébriques* (Paris, 1870), M. Camille JORDAN, dont les recherches fondamentales sur la théorie et les applications des groupes finis ont jeté les bases d'une nouvelle branche des mathématiques. Il a pour but de donner un exposé d'ensemble de la *théorie des groupes finis* et de leurs principales applications. Il comprend trois parties rédigées par MM. Miller, Blichfeldt et Dickson, bien connus par leurs nombreuses contributions à la théorie des groupes.

Dans la *Première Partie*, M. G. A. MILLER (University of Illinois) expose les notions fondamentales de la théorie des substitutions et des groupes abstraits. Dès les premières définitions l'auteur fait appel à des exemples empruntés à la Géométrie, la rotation, autour de leur centre, d'un triangle équilatéral ou d'un carré, permettant d'illustrer d'une façon très claire les notions de groupe et de sous-groupe.

Les fondements de la théorie sont caractérisés, comme on sait, par les théorèmes de Sylow, de Lagrange et de Cayley, par les groupes abéliens et par la théorie de l'isomorphisme. Ils sont présentés avec le soin et la précision indispensables dans une première initiation.

La *Seconde Partie*, rédigée par M. H. F. BLICHFELDT (Stanford University, Cal.), contient l'étude des groupes finis de transformations linéaires et homogènes, dont les transformations de coordonnées fournissent les exemples les plus simples. L'auteur étudie les principaux cas suivant les conditions auxquelles on soumet les éléments du tableau formé par les coefficients.

Dans la *Troisième Partie*, M. L. E. DICKSON (University of Chicago) a réuni les principales applications des groupes finis, en Algèbre, en Géométrie et en Analyse. Les plus importantes sont relatives à la résolution des équations algébriques : domaine de la rationalité, résolvantes de Galois, conditions suffisantes pour qu'une équation algébrique soit résoluble par radicaux ; conditions suffisantes pour que cela soit possible, application aux constructions à l'aide de la règle et du compas. Passant au domaine de la Géométrie, M. Dickson examine les applications fournies par la recherche des points d'inflexion d'une cubique plane et par les 27 droites d'une surface du 3<sup>e</sup> ordre et les 28 tangentes doubles d'une quadrique. En Analyse, ce sont les applications des groupes de monodromie à la théorie des équations différentielles linéaires.

Bien que cet Ouvrage soit dû à la collaboration de trois auteurs, l'unité de l'exposé n'en souffre pas. Le traité de MM. Miller, Blichfeldt et Dickson constitue une excellente introduction à la théorie des groupes finis. En raison de l'importance que la notion de groupe joue dans les fondements de plusieurs branches mathématiques, il est appelé à rendre de grands services dans l'enseignement universitaire. H. F.

SALMON-FIEDLER. — **Analytische Geometrie der Kegelschnitte** von George SALMON. Nach der freien Bearbeitung von Wilh. FIEDLER. Neu herausgegeben von Fried. DINGELDEY. Achte Auflage. Erster Teil. — 1 vol. in-8°, xxx-452 p. ; relié, 12 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

La première édition allemande du *Treatise on conic sections* (Dublin, 1848) de Salmon remonte à 1860. W. Fiedler, professeur à l'Ecole polytechnique de Zurich, publia les sept premières éditions, en apportant chaque fois des remaniements et des compléments. A la suite du décès du savant géomètre, c'est M. Dingeldey qui s'est chargé de la publication de ce traité qui, depuis la cinquième édition, paraît en deux volumes. A son tour il introduit quelques modifications afin de tenir compte des besoins et de l'état actuel de l'enseignement scientifique.

Il est inutile de rappeler ici le contenu de ce traité classique consacré à la géométrie analytique à deux dimensions. Cette première partie comprend l'étude des coordonnées, de la droite, des formes projectives, du cercle, de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole.

F. GOMES TEIXEIRA. — **Sur les problèmes célèbres de la Géométrie élémentaire** non résolubles avec la règle et le compas. — 1 vol. grand in-8°, 132 p. ; Imprimerie de l'Université, Coïmbre, 1915.

Dans ce volume, le savant géomètre portugais, M. F. G. Teixeira, a groupé les principales solutions qui ont été proposées pour la résolution des problèmes célèbres de la Géométrie élémentaire non résolubles à l'aide de la règle et du compas. Ces problèmes sont, comme on sait, la duplication du cube, la trisection de l'angle et la quadrature du cercle. Ces trois problèmes font l'objet des trois premiers chapitres dans lesquels l'auteur expose, dans leur ordre chronologique, les solutions les plus remarquables en ayant soin de rappeler les sources historiques.

I. Le problème de la *duplication du cube*, désigné souvent sous le nom de problème de Délos, a pour but de déterminer un cube dont le volume soit le double de celui d'un cube donné. Hippocrate de Chio a réduit ce problème à celui de la *détermination de deux moyennes proportionnelles entre deux segments a et b*, c'est-à-dire à celui de la détermination de deux segments  $x$  et  $y$  vérifiant les équations

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}, \quad \text{ou} \quad xy = ab, \quad x^3 = a^2 b.$$

Le problème de la duplication du cube correspond au cas  $b = 2a$ .

M. Teixeira expose les solutions dues aux géomètres grecs Platon, Architas, Eudoxe, Menechme, Héron, Phylo-Bizantinus, Apollonius, Eratosthène, Nicomède, Dioclès, puis celles qui ont été données après la Renaissance par Viète, Villapandus, Gruenbergerius, Descartes, Fermat. Sluse, Newton, Viviani, Huguens, Clairaut et Montucci.

II. La plus ancienne des méthodes connues pour résoudre le problème de la *division de l'angle en trois parties égales* est due à Hippias, qui fait usage d'une courbe qu'il a inventée et qui a été nommée plus tard *quadratrice* de Dinostrate. Viennent ensuite les méthodes d'Archimède, de Nicomède, de Pappus, puis, après la Renaissance, celle d'Etienne Pascal, de Descartes, de Fermat, de Kinner, de T. Ceva, de Maclaurin, de Delanges, de Chasles, de Lucas, de Catalan, de Longchamps, de Kempe.

III. Le chapitre consacré à la quadrature du cercle débute par une Notice sur les premiers documents concernant ce célèbre problème. Le document le plus ancien rencontré jusqu'à présent est le *Papyrus Rhind*. Parmi les géomètres de l'ancienne Grèce qui se sont occupés de cette question on trouve les noms d'Anaxagore, d'Hippocrate de Chio, d'Antiphon, de Bryson et d'Archimède. Les méthodes graphiques proposées reposent sur l'emploi de courbes qu'ils ont nommées *quadratrices*. L'auteur signale ensuite les méthodes qui ont été données plus tard pour le calcul ou pour la construction de  $\pi$ , par Viète, Adriane Romanus, L. van Ceulen, Snellius, Huygens, James Gregory, Descartes, Euler, Legendre, Wallis, etc.

IV. Dans un dernier chapitre M. Teixeira examine l'impossibilité de la résolution, à l'aide de la règle et du compas, des trois problèmes qu'on vient de rappeler. Abordée par Descartes, l'impossibilité d'une telle solution n'a été définitivement établie qu'au XIX<sup>e</sup> siècle, grâce aux travaux de Gauss, d'Abel, de Petersen, d'Hermite, de Lindemann, de Gordan et d'autres. Pour ce qui concerne plus particulièrement l'impossibilité de la quadrature du cercle, l'auteur adopte la démonstration de Gordan, exposée d'une manière très claire et élémentaire par M. Klein dans ses « Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie » ; il y apporte quelques simplifications et remplace l'analyse symbolique qu'on y emploie, par une analyse ordinaire.

H. F.

Ch. de la VALLÉE-POUSSIN. — **Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire.** — Leçons professées au Collège de France. — 1 vol. in-8<sup>o</sup> de VIII-154 pages ; 7 fr. ; Gauthier-Villars, Paris, 1916.

Les effroyables malheurs de la Belgique ont amené M. de la Vallée-Poussin à l'Université de Harvard et au Collège de France. Ce n'est pas une compensation et il aurait pu y venir sans cela ; c'est cependant une répercussion fort heureuse en soi et qui nous vaut un élégant volume relatif à des questions présentées parfois sous une apparence sévère.

La théorie des ensembles, qui n'est guère qu'une sorte de classification quand il s'agit des ensembles dénombrables, présente immédiatement une richesse surprenante dès qu'on aborde le continu et les ensembles de même puissance. L'antique et instinctive notion de *mesure* du continu s'étend alors d'une manière prodigieuse. Dans les ensembles *mesurables*, si bien étudiés par M. Borel, la notion d'intégrale est immédiatement généralisable et devient celle de M. Lebesgue.

Un autre point de vue se superpose à ceux-ci.

Considérons la fonction caractéristique d'un ensemble, définie comme étant égale à 1 sur tous les points de l'ensemble et à zéro partout ailleurs ; en général, ce sera une fonction discontinue. Or il se trouve que toutes les fonctions discontinues que l'on peut avoir à considérer ainsi ont été irrémédiablement classées et définies par M. Baire.

En fait les travaux de MM. Borel, Lebesgue et Baire se trouvent s'équivaloir, à condition peut-être de faire quelques arrangements de détail nécessaires pour bien comparer les résultats obtenus isolément ; c'est justement là un point dont s'occupe M. de la Vallée-Poussin et, pour les travaux en question, ce n'est pas une mince preuve de valeur que de pouvoir se superposer après avoir été conçus sous trois aspects divers. Et maintenant l'élégante perfection des théories mathématiques définitives est un fait absolument acquis dans ces domaines.



Ces généralités emplissent une première partie de l'ouvrage.

La seconde partie est consacrée aux fonctions  $F(E)$  d'un ensemble  $E$ . On trouve ici, d'une manière fort curieuse, des généralisations du calcul différentiel élémentaire. Si l'on prend dans  $E$  un domaine rectangulaire  $\omega$ , dont la mesure peut tendre vers zéro, le rapport de  $F(\omega)$  à cette mesure peut avoir différentes limites appelées *dérivées*. La symétrie attribuée d'abord au domaine  $\omega$  n'est pas chose essentielle mais, pour approfondir commodément la question, l'auteur étudie les ensembles au moyen de *réseaux* et *grillages*. Ce sont, si l'on veut, des perfectionnements de l'appareil rudimentaire avec lequel on divisait un segment en un nombre indéfiniment croissant de parties égales. Pour en revenir à la dérivation générale, il faut observer qu'elle nécessite beaucoup plus de précautions que l'intégration générale; c'est une chose remarquée depuis longtemps mais qui réapparaît ici avec une facile et heureuse rigueur.

La troisième partie, consacrée aux classes de Baire, revient surtout sur l'existence réelle des fonctions dans les dites classes. Je rappelle que M. R. Baire range les fonctions continues dans la classe zéro, les fonctions limites de fonctions continues (quand ces fonctions limites ne sont pas de classe zéro) dans la classe 1, les fonctions limites de fonctions de classe 1 (quand ces fonctions limites ne sont pas de classe zéro ou 1) dans la classe 2, etc. On était habitué aux fonctions de classe zéro et 1; au delà commençaient de redoutables difficultés aplanies aujourd'hui par la considération des caractéristiques d'ensembles qui, par certains « théorèmes de structure », sont classés, eux aussi, de proche en proche.

Il m'est difficile de faire un croquis plus précis de ces excellentes leçons car il me faudrait, pour cela, reproduire nombre de définitions ingénieusement maniées par M. de la Vallée-Poussin, mais je crois en avoir assez dit pour marquer tout l'intérêt qui s'attache à l'œuvre. Il faut surtout considérer que celle-ci n'est pas issue directement de la célèbre trinité Baire-Borel-Lebesgue.

Elle est l'œuvre d'un mathématicien très au courant de ces théories fonctionnelles, très apte à les juger et qui, le cas échéant, aurait pu faire des critiques d'un grand poids.

Or il ne critique absolument rien et, fondant tout dans une exposition simple et harmonieuse, donne ainsi une remarquable confirmation de la simplicité et de l'harmonie des théories générales en question.

A. BUHL (Toulouse).