Ch. de la Vallée-Poussin. — Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire. — Leçons professées au Collège de France. — 1 vol. in-8° de viii-154 pages ; 7 fr. ; Gauthier-Villars, Paris, 1916.

III. Le chapitre consacré à la quadrature du cercle débute par une Notice sur les premiers documents concernant ce célèbre problème. Le document le plus ancien rencontré jusqu'à présent est le *Papirus Rhind*. Parmi les géomètres de l'ancienne Grèce qui se sont occupés de cette question on trouve les noms d'Anaxagore, d'Hippocrate de Chio, d'Antiphon, de Bryson et d'Archimède. Les méthodes graphiques proposées reposent sur l'emploi de courbes qu'ils ont nommées *quadratrices*. L'auteur signale ensuite les méthodes qui ont été données plus tard pour le calcul ou pour la construction de π, par Viète, Adriane Romanus, L. van Ceulen, Snellius, Huygens, James Gregory, Descartes, Euler, Legendre, Wallis, etc.

IV. Dans un dernier chapitre M. Teixeira examine l'impossibilité de la résolution, à l'aide de la règle et du compas, des trois problèmes qu'on vient de rappeler. Abordée par Descartes, l'impossibilité d'une telle solution n'a été définitivement établie qu'au XIXe siècle, grâce aux travaux de Gauss, d'Abel, de Petersen, d'Hermite, de Lindemann, de Gordan et d'autres. Pour ce qui concerne plus particulièrement l'impossibilité de la quadrature du cercle, l'auteur adopte la démonstration de Gordan, exposée d'une manière très claire et élémentaire par M. Klein dans ses « Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie » ; il y apporte quelques simplifications et remplace l'analyse symbolique qu'on y emploie, par une analyse ordinaire.

H. F.

Ch. de la Vallée-Poussin. — **Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire.** — Leçons professées au Collège de France. — 1 vol. in-8° de VIII-154 pages ; 7 fr. ; Gauthier-Villars, Paris, 1916.

Les effroyables malheurs de la Belgique ont amené M. de la Vallée-Poussin à l'Université de Harward et au Collège de France. Ce n'est pas une compensation et il aurait pu y venir sans cela ; c'est cependant une répercussion fort heureuse en soi et qui nous vaut un élégant volume relatif à des questions présentées parfois sous une apparence sévère.

La théorie des ensembles, qui n'est guère qu'une sorte de classification quand il s'agit des ensembles dénombrables, présente immédiatement une richesse surprenante dès qu'on aborde le continu et les ensembles de même puissance. L'antique et instinctive notion de *mesure* du continu s'étend alors d'une manière prodigieuse. Dans les ensembles *mesurables*, si bien étudiés par M. Borel, la notion d'intégrale est immédiatement généralisable et devient celle de M. Lebesgue.

Un autre point de vue se superpose à ceux-ci.

Considérons la fonction caractéristique d'un ensemble, définie comme étant égale à 1 sur tous les points de l'ensemble et à zéro partout ailleurs ; en général, ce sera une fonction discontinue. Or il se trouve que toutes les fonctions discontinues que l'on peut avoir à considérer ainsi ont été irréprochablement classées et définies par M. Baire.

En fait les travaux de MM. Borel, Lebesgue et Baire se trouvent s'équivaloir, à condition peut-être de faire quelques arrangements de détail nécessaires pour bien comparer les résultats obtenus isolément ; c'est justement là un point dont s'occupe M. de la Vallée-Poussin et, pour les travaux en question, ce n'est pas une mince preuve de valeur que de pouvoir se superposer après avoir été conçus sous trois aspects divers. Et maintenant l'élégante perfection des théories mathématiques définitives est un fait absolument acquis dans ces domaines.

Ces généralités emplissent une première partie de l'ouvrage.

La seconde partie est consacrée aux fonctions F(E) d'un ensemble E. On trouve ici, d'une manière fort curieuse, des généralisations du calcul différentiel élémentaire. Si l'on prend dans E un domaine rectangulaire ω, dont la mesure peut tendre vers zéro, le rapport de $F(\omega)$ à cette mesure peut avoir différentes limites appelées *dérivées*. La symétrie attribuée d'abord au domaine ω n'est pas chose essentielle mais, pour approfondir commodément la question, l'auteur étudie les ensembles au moyen de *réseaux* et *grillages*. Ce sont, si l'on veut, des perfectionnements de l'appareil rudimentaire avec lequel on divisait un segment en un nombre indéfiniment croissant de parties égales. Pour en revenir à la dérivation générale, il faut observer qu'elle nécessite beaucoup plus de précautions que l'intégration générale; c'est une chose remarquée depuis longtemps mais qui réapparaît ici avec une facile et heureuse rigueur.

La troisième partie, consacrée aux classes de Baire, revient surtout sur l'existence réelle des fonctions dans les dites classes. Je rappelle que M. R. Baire range les fonctions continues dans la classe zéro, les fonctions limites de fonctions continues (quand ces fonctions limites ne sont pas de classe zéro) dans la classe 1, les fonctions limites de fonctions de classe 1 (quand ces fonctions limites ne sont pas de classe zéro ou 1) dans la classe 2, etc. On était habitué aux fonctions de classe zéro et 1 ; au delà commençaient de redoutables difficultés aplanies aujourd'hui par la considération des caractéristiques d'ensembles qui, par certains « théorèmes de structure », sont classés, eux aussi, de proche en proche.

Il m'est difficile de faire un croquis plus précis de ces excellentes leçons car il me faudrait, pour cela, reproduire nombre de définitions ingénieusement maniées par M. de la Vallée-Poussin, mais je crois en avoir assez dit pour marquer tout l'intérêt qui s'attache à l'œuvre. Il faut surtout considérer que celle-ci n'est pas issue directement de la célèbre trinité Baire-Borel-Lebesgue.

Elle est l'œuvre d'un mathématicien très au courant de ces théories fonctionnelles, très apte à les juger et qui, le cas échéant, aurait pu faire des critiques d'un grand poids.

Or il ne critique absolument rien et, fondant tout dans une exposition simple et harmonieuse, donne ainsi une remarquable confirmation de la simplicité et de l'harmonie des théories générales en question.

A. Buhl (Toulouse).