Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 19 (1917)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES REPRÉSENTATIONS ARITHMÉTIQUES DES FONCTIONS ANALYTIQUES

Autor: Kienast, A.

Kapitel: IV

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-17319

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Enfin les relations

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{-i\frac{n\pi}{2}} \cdot y_1(x) = \mathrm{H}_n^{(1)}(x) ,$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{i\frac{n\pi}{2}} \cdot y_2(x) = \mathrm{H}_n^{(2)}(x) ,$$

montrent qu'on est arrivé à la représentation par intégrales définies des fonctions cylindriques de troisième espèce[1] (Hankel).

On voit que la formule (16) et d'autres qu'on obtient par le même procédé fournissent un moyen indispensable pour des calculs effectifs, notamment pour les séries dérivant des équations différentielles linéaires du type hypergéométrique.

IV

Je reprends les considérations du commencement de III, en disposant des constantes $a_{n\lambda}$ comme il suit

$a_{n\lambda}$	$\lambda = 0$	1	2	3
$n = 0$	0	0	0	0 .
1	$\frac{a_{00}}{\alpha + 1}$	0	0	0 .
2	$\frac{a \cdot a_{00}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}$	$\frac{a \cdot a_{01}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}$	0	0 .
3	$\frac{a^2 \cdot a_{00}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)}$	$\frac{a^2 \cdot a_{01}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)}$	$\frac{a^2 \cdot a_{02}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)}$	0 .

Il en résulte

$$\mathrm{A}_0 = 0 ,$$

. . . . . .

$$\mathrm{A}_n = \frac{a^{n-1} \cdot \sum_{\mu=0}^{n-1} a_{0\mu} z^{\mu}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2) \ldots (\alpha + n)} ,$$

$$\mathrm{D}_0 = 0 ,$$

. . . . . .

$$\mathrm{D}_n = \frac{a^{n-1} \cdot a_{0,n-1} \cdot z^{n-1}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2) \ldots (\alpha + n)} ,$$

[1] N. Nielsen. *Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen.*

et la formule (12) devient

$$e^{-ax}(ax)^{\alpha}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(ax)^{\lambda}}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)}\left[\sum_{n=0}^{\lambda-1}a_{0n}z^{n}\right]$$

$$=\int_{0}^{x}e^{-at}(at)^{\alpha}\left\{\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{a_{0\lambda}(azt)^{\lambda}}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)}\right\}d(at)\ . \qquad (21)$$

Cette équation est démontrée pour $R(\alpha) > 0$, mais on voit aisément qu'elle reste valable pour $\alpha = 0$. En outre on a par rapport aux $a_{n\lambda}$ et z à remplir la condition que

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n = x\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{a_{0\lambda}(azx)^{\lambda}}{(\alpha+1)\ldots(\alpha+\lambda)}\ ,$$

soit une série convergente. Elle est satisfaite si $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda}z^{\lambda}$ est une série convergente; elle peut l'être encore pour une infinité de séries asymptotiques. Il est permis de donner dans (21) à x une valeur finie quelconque, si $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda}z^{\lambda}$ est convergente, mais si c'est une série asymptotique il y a des restrictions spéciales pour chaque choix des constantes $a_{0\lambda}$.

De la définition de la notion limite on conclut que pour $\lim x = +\infty$ les deux membres de (21) convergent pour les mêmes valeurs de z.

L'intégrale du second membre a été considérée dans III.

Cette formule (21) dans le cas $a = 1$, $\alpha = 0$, $\lim x = +\infty$ est la découverte de M. E. Borel [1] et M. G. Mittag-Leffler en parle à plusieurs occasions [2].

Il me semble du plus haut intérêt qu'il ne subsiste pas seulement pour $\lim x = +\infty$ mais z étant fixé pour chaque valeur x qui est point régulier de la fonction analytique défini par la série de Taylor $\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{a_{0\lambda}(azx)^{\lambda}}{\Gamma(a+\lambda+1)}$ à rayon de convergence fini plus grand que zéro.

---

[1] Voir : *Leçons sur les séries divergentes*, Paris, 1901.

[2] Par exemple, Sur la représentation, etc., *Acta Math.*, T. 26 (1902), p. 374.