IV

Enfin les relations

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{-i\frac{n\pi}{2}} \cdot y_1(x) = \mathrm{H}_n^{(1)}(x) \;,$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{i\frac{n\pi}{2}} \cdot y_2(x) = \mathrm{H}_n^{(2)}(x) \;,$$

montrent qu'on est arrivé à la représentation par intégrales définies des fonctions cylindriques de troisième espèce[1] (Hankel).

On voit que la formule (16) et d'autres qu'on obtient par le même procédé fournissent un moyen indispensable pour des calculs effectifs, notamment pour les séries dérivant des équations différentielles linéaires du type hypergéométrique.

IV

Je reprends les considérations du commencement de III, en disposant des constantes $a_{n\lambda}$ comme il suit

$a_{n\lambda}$	$\lambda = 0$	1	2	3
$n = 0$	0	0	0	0 .
1	$\frac{a_{00}}{\alpha + 1}$	0	0	0 .
2	$\frac{a \cdot a_{00}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}$	$\frac{a \cdot a_{01}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}$	0	0 .
3	$\frac{a^2 \cdot a_{00}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)}$	$\frac{a^2 \cdot a_{01}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)}$	$\frac{a^2 \cdot a_{02}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)}$	0 .

Il en résulte

$$\mathrm{A}_0 = 0 \;,$$

. . . .

$$\mathrm{A}_n = \frac{a^{n-1} \cdot \sum_{\mu=0}^{n-1} a_{0\mu} z^{\mu}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + n)} \;,$$

$$\mathrm{D}_0 = 0 \;,$$

. . . .

$$\mathrm{D}_n = \frac{a^{n-1} \cdot a_{0,n-1} \cdot z^{n-1}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + n)} \;,$$

[1] N. Nielsen. *Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen.*

et la formule (12) devient

$$e^{-ax}(ax)^{\alpha}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(ax)^{\lambda}}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)}\left[\sum_{n=0}^{\lambda-1}a_{0n}z^{n}\right]$$

$$=\int_0^x e^{-at}(at)^{\alpha}\left\{\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{a_{0\lambda}(azt)^{\lambda}}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)}\right\}d(at)\,. \tag{21}$$

Cette équation est démontrée pour $R(\alpha)>0$, mais on voit aisément qu'elle reste valable pour $\alpha=0$. En outre on a par rapport aux $a_{n\lambda}$ et z à remplir la condition que

$$\sum_{n=0}^{\infty}D_n x^n = x\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{a_{0\lambda}(azx)^{\lambda}}{(\alpha+1)\ldots(\alpha+\lambda)}\,,$$

soit une série convergente. Elle est satisfaite si $\sum\limits_{\lambda=0}^{\infty}a_{0\lambda}z^{\lambda}$ est une série convergente; elle peut l'être encore pour une infinité de séries asymptotiques. Il est permis de donner dans (21) à x une valeur finie quelconque, si $\sum\limits_{\lambda=0}^{\infty}a_{0\lambda}z^{\lambda}$ est convergente, mais si c'est une série asymptotique il y a des restrictions spéciales pour chaque choix des constantes $a_{0\lambda}$.

De la définition de la notion limite on conclut que pour $\lim x=+\infty$ les deux membres de (21) convergent pour les mêmes valeurs de z.

L'intégrale du second membre a été considérée dans III.

Cette formule (21) dans le cas $a=1$, $\alpha=0$, $\lim x=+\infty$ est la découverte de M. E. Borel[1] et M. G. Mittag-Leffler en parle à plusieurs occasions[2].

Il me semble du plus haut intérêt qu'il ne subsiste pas seulement pour $\lim x=+\infty$ mais z étant fixé pour chaque valeur x qui est point régulier de la fonction analytique défini par la série de Taylor $\sum\limits_{\lambda=0}^{\infty}\frac{a_{0\lambda}(azx)^{\lambda}}{\Gamma(a+\lambda+1)}$ à rayon de convergence fini plus grand que zéro.

---

[1] Voir : *Leçons sur les séries divergentes*, Paris, 1901.

[2] Par exemple, Sur la représentation, etc., *Acta Math.*, T. 26 (1902), p. 374.