Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 19 (1917)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES REPRÉSENTATIONS ARITHMÉTIQUES DES FONCTIONS ANALYTIQUES

Autor: Kienast, A.

Kapitel: V

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-17319

V

Comme dernière application de la méthode exposée je reviens à l'équation (3) pour $\alpha = 1$.

$$x\frac{dy}{dx} - xp(x)y = x\,.\,\varphi(x)\ , \tag{22}$$

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\ ,$$

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{D}_m x^m$$

$p(x)$ et $\varphi(x)$ étant des séries de Taylor à rayon de convergence non nul. L'intégrale de l'équation sans second membre est

$$y_1(x) = e^{\int_0^x p(\xi)d\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}(n)x^n\ , \tag{4}$$

et il reste à calculer les différentes parties de la formule (9) pour le cas présent.

$$\left|\frac{\mathrm{V}(x)}{y_1(x)}\right|_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} \frac{\varphi(t)\,dt}{y_1(t)}\ .$$

Le théorème du second cas dans I montre qu'on aura

$$\mathrm{V}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{A}_n x^n\ ,$$

et l'on obtient

$$\mathrm{D}_n = (n+1)\mathrm{A}_{n+1} - \sum_{\lambda=0}^{n} b_{n-\lambda}\,.\,\mathrm{A}_\lambda\ .$$

Je dispose des $\mathrm{A}_n = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda} z^\lambda$ de la manière suivante :

$a_{n\lambda}$	$\lambda = 0$	1	2	3
$n = 0$	0	0	0	0 .
1	$\mathrm{E}(1)\,a_0$	0	0	0 .
2	$\mathrm{E}(2)\,a_0$	$\mathrm{E}(2)\,a_1$	0	0 .
3	$\mathrm{E}(3)\,a_0$	$\mathrm{E}(3)\,a_1$	$\mathrm{E}(3)\,a_2$	0 .

d'où

$$A_0 = 0 ,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$A_n = E(n) \sum_{r=0}^{n-1} a_r z^r ,$$

et par suite

$$D_n = (n+1) E(n+1) \sum_{r=0}^{n} a_r z^r - \sum_{\lambda=0}^{n} b_{n-\lambda} E(\lambda) \left\{ \sum_{r=0}^{\lambda-1} a_r z^r \right\}$$

$$= (n+1) E(n+1) a_n z^n + \sum_{r=0}^{n-1} a_r z^r \left[(n+1) E(n+1) - \sum_{\mu=0}^{n-1-r} b_\mu E(n-\mu) \right]$$

$$= \sum_{r=0}^{n} d_{n,r} a_r z^r .$$

Donc on est arrivé à l'équation

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} E(n) x^n \left(\sum_{r=0}^{n-1} a_r z^r \right)}{\sum_{n=0}^{\infty} E(n) x^n}$$

$$= \int_0^x \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} t^n [d_{n,0} a_0 + d_{n,1} a_1 z + \ldots + d_{n,n} a_n z^n] \right\} \frac{dt}{y_1(t)} . \qquad (23)$$

Pour le moment je considère cette formule seulement en supposant $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} E(n) x^n$ fonction entière transcendante. Dans ce cas M. Mittag-Leffler[1] donne pour l'expression à gauche dans (23) la valeur

$$= \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r - \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{y_1(x)} \int_S \frac{F(z \cdot y)}{y-1} \cdot y_1\left(\frac{x}{y}\right) dy . \qquad (24)$$

où

$$F(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r .$$

Le contour S doit être la limite d'une surface simplement

[1] Voir: Sur la représentation, etc., *Acta Math.*, T. 29, p. 170.

connexe pour laquelle la fonction $F(z.y)$ reste régulière; il doit être parcouru dans le sens direct et embrasser les deux points $y = 0$, $y = 1$.

En discutant l'intégrale curviligne M. G. Mittag-Leffler a démontré que

$$\lim_{x=\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} E(n) x^n \left(\sum_{r=0}^{n-1} a_r z^r \right)}{\sum_{n=0}^{\infty} E(n) x^n} = FA(z) \qquad (25)$$

est uniformément convergente pour tout domaine intérieur à l'étoile principale A et représente la branche fonctionnelle $FA(z)$ partout à l'intérieur de cette étoile, si la fonction entière $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} E(n) x^n$ est choisie telle que :

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_1(x.u)}{y_1(x)} = \lim_{x=\infty} e^{\int_0^{x.u} p(\xi) d\xi - \int_0^x p(\xi) d\xi} = 0$$

d'une manière uniforme tant que u appartient à un domaine fini situé en dehors de la partie de l'axe réel positif compris entre $x = 1$ et l'infini. Cette condition est satisfaite par toute fonction entière

$$\int_0^x p(\xi) d\xi = T(x) \qquad (26)$$

possédant la propriété :

$$\lim_{r=\infty} T(r.e^{i\varphi}) = 0$$

uniformément pour

$$\varepsilon < \varphi < 2\pi - \varepsilon ,$$

ε étant un nombre positif arbitrairement petit,

$$\lim_{r=\infty} T(r.e^{i\varphi}) = \infty \qquad \text{pour} \qquad \varphi = 0 .$$

En outre M. Mittag-Leffler démontre que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(n) x^n \left(\sum_{r=0}^{n-1} | a_r z^r | \right)$$

est pour toute valeur de z une série toujours convergente par rapport à x. Elle est, x étant fixé, uniformément convergente pour un domaine quelconque de la variable z. $p(x) = T'(x)$ est fonction entière transcendante, donc $\varphi(x) = V'(x) - p(x).V(x)$ est une série de x et de z qui partage avec $V(x)$ les deux propriétés exposées il y a un moment. La fonction entière transcendante $y_1(x) = e^{T(x)}$ ne s'annule pour aucune valeur finie x et par suite l'intégrale dans (23) a un sens pour chaque valeur finie x.

En passant à la limite on est conduit à cause de (25) à la formule

$$\int_0^\infty \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} t^n [d_{n,0} a_0 + d_{n,1} a_1 z + \dots + d_{n,n} a_n z^n] \right\} \frac{dt}{y_1(t)} = \mathrm{FA}(z) \,. \tag{27}$$

L'intégrale converge uniformément pour tout domaine intérieur à l'étoile principale A. C'est une généralisation de l'intégrale Laplace-Abel, de l'intégrale de M. Mittag-Leffler et une formule analogue à la troisième des formules (125) p. 177 démontrées par M. Mittag-Leffler (*Acta Math.* t. 29).

Je termine par la remarque que les applications de la méthode exposée peuvent être augmentées considérablement, car elle contient trois éléments arbitraires: 1. l'équation différentielle de liaison d'ordre quelconque; 2. le point x_0, qui peut être point singulier de cette équation différentielle en lequel toutes ses intégrales sont régulières ou point singulier en lequel les intégrales sont irrégulières; 3. le chemin d'intégration.

D'autres résultats que j'ai obtenus paraîtront dans la *Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich* [1].

Küsnacht (Zürich), octobre 1916.

[1] « Neue Entwicklungen über die Abel'sche Integralumkehrungsformel. » Jahrgang 62 (1917).