

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 19 (1917)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES REPRÉSENTATIONS ARITHMÉTIQUES DES
FONCTIONS ANALYTIQUES
Autor: Kienast, A.
Kapitel: V
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-17319>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 18.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

V

Comme dernière application de la méthode exposée je reviens à l'équation (3) pour $\alpha = 1$.

$$x \frac{dy}{dx} - xp(x)y = x \cdot \varphi(x) , \tag{22}$$

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n ,$$

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} D_m x^m$$

$p(x)$ et $\varphi(x)$ étant des séries de Taylor à rayon de convergence non nul. L'intégrale de l'équation sans second membre est

$$y_1(x) = e^{\int_0^x p(\xi) d\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} E(n) x^n , \tag{4}$$

et il reste à calculer les différentes parties de la formule (9) pour le cas présent.

$$\left| \frac{V(x)}{y_1(x)} \right|_{x_0}^x = \int_{x_0}^x \frac{\varphi(t) dt}{y_1(t)} .$$

Le théorème du second cas dans I montre qu'on aura

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n ,$$

et l'on obtient

$$D_n = (n + 1)A_{n+1} - \sum_{\lambda=0}^n b_{n-\lambda} \cdot A_\lambda .$$

Je dispose des $A_n = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda} z^\lambda$ de la manière suivante :

$a_{n\lambda}$	$\lambda = 0$	1	2	3
$n = 0$	0	0	0	0 .
1	$E(1) a_0$	0	0	0 .
2	$E(2) a_0$	$E(2) a_1$	0	0 .
3	$E(3) a_0$	$E(3) a_1$	$E(3) a_2$	0 .

d'où

$$A_0 = 0 ,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_n = E(n) \sum_{r=0}^{n-1} a_r z^r ,$$

et par suite

$$D_n = (n+1) E(n+1) \sum_{r=0}^n a_r z^r - \sum_{\lambda=0}^n b_{n-\lambda} E(\lambda) \left\{ \sum_{r=0}^{\lambda-1} a_r z^r \right\}$$

$$= (n+1) E(n+1) a_n z^n + \sum_{r=0}^{n-1} a_r z^r \left[(n+1) E(n+1) - \sum_{\mu=0}^{n-1-r} b_{\mu} E(n-\mu) \right]$$

$$= \sum_{r=0}^n d_{n,r} a_r z^r .$$

Donc on est arrivé à l'équation

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} E(n) x^n \left(\sum_{r=0}^{n-1} a_r z^r \right)}{\sum_{n=0}^{\infty} E(n) x^n}$$

$$= \int_0^x \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} t^n [d_{n,0} a_0 + d_{n,1} a_1 z + \dots + d_{n,n} a_n z^n] \right\} \frac{dt}{y_1(t)} . \quad (23)$$

Pour le moment je considère cette formule seulement en supposant $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} E(n) x^n$ fonction entière transcendante.

Dans ce cas M. Mittag-Leffler¹ donne pour l'expression à gauche dans (23) la valeur

$$= \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r - \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{y_1(x)} \int_S \frac{F(z \cdot y)}{y-1} \cdot y_1\left(\frac{x}{y}\right) dy . \quad (24)$$

où

$$F(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r .$$

Le contour S doit être la limite d'une surface simplement

¹ Voir : Sur la représentation, etc., *Acta Math.*, T. 29, p. 170.

connexe pour laquelle la fonction $F(z, y)$ reste régulière; il doit être parcouru dans le sens direct et embrasser les deux points $y = 0, y = 1$.

En discutant l'intégrale curviligne M. G. Mittag-Leffler a démontré que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} E(n) x^n \left(\sum_{r=0}^{n-1} a_r z^r \right)}{\sum_{n=0}^{\infty} E(n) x^n} = FA(z) \tag{25}$$

est uniformément convergente pour tout domaine intérieur à l'étoile principale A et représente la branche fonctionnelle $FA(z)$ partout à l'intérieur de cette étoile, si la fonction entière

$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} E(n) x^n$ est choisie telle que :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y_1(x \cdot u)}{y_1(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\int_0^{x \cdot u} p(\xi) d\xi - \int_0^x p(\xi) d\xi} = 0$$

d'une manière uniforme tant que u appartient à un domaine fini situé en dehors de la partie de l'axe réel positif compris entre $x = 1$ et l'infini. Cette condition est satisfaite par toute fonction entière

$$\int_0^x p(\xi) d\xi = T(x) \tag{26}$$

possédant la propriété :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} T(r \cdot e^{i\varphi}) = 0$$

uniformément pour

$$\varepsilon < \varphi < 2\pi - \varepsilon ,$$

ε étant un nombre positif arbitrairement petit,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} T(r \cdot e^{i\varphi}) = \infty \quad \text{pour} \quad \varphi = 0 .$$

En outre M. Mittag-Leffler démontre que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(n) x^n \left(\sum_{r=0}^{n-1} |a_r z^r| \right)$$

est pour toute valeur de z une série toujours convergente par rapport à x . Elle est, x étant fixé, uniformément convergente pour un domaine quelconque de la variable z . $p(x) = T'(x)$ est fonction entière transcendante, donc $\varphi(x) = V'(x) - p(x).V(x)$ est une série de x et de z qui partage avec $V(x)$ les deux propriétés exposées il y a un moment. La fonction entière transcendante $y_1(x) = e^{T(x)}$ ne s'annule pour aucune valeur finie x et par suite l'intégrale dans (23) a un sens pour chaque valeur finie x .

En passant à la limite on est conduit à cause de (25) à la formule

$$\int_0^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} t^n [d_{n,0} a_0 + d_{n,1} a_1 z + \dots + d_{n,n} a_n z^n] \right\} \frac{dt}{y_1(t)} = \text{FA}(z). \quad (27)$$

L'intégrale converge uniformément pour tout domaine intérieur à l'étoile principale A. C'est une généralisation de l'intégrale Laplace-Abel, de l'intégrale de M. Mittag-Leffler et une formule analogue à la troisième des formules (125) p. 177 démontrées par M. Mittag-Leffler (*Acta Math.* t. 29).

Je termine par la remarque que les applications de la méthode exposée peuvent être augmentées considérablement, car elle contient trois éléments arbitraires: 1. l'équation différentielle de liaison d'ordre quelconque; 2. le point x_0 , qui peut être point singulier de cette équation différentielle en lequel toutes ses intégrales sont régulières ou point singulier en lequel les intégrales sont irrégulières; 3. le chemin d'intégration.

D'autres résultats que j'ai obtenus paraîtront dans la *Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich*¹.

Küsnacht (Zürich), octobre 1916.

¹ « Neue Entwicklungen über die Abel'sche Integralumkehrungsformel. » Jahrgang 62 (1917).