

# NOTIONS D'ARITHMOGÉOMÉTRIE

Autor(en): **Turrière, Emile**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1917)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-17321>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

paraît résider dans le fait que le problème général posé au n° 2 conduit à la forme générale de la fonction  $F(z)$  donnée au n° 5.

Une recherche analogue et présentant même intérêt peut être faite pour le problème généralisé que nous venons d'indiquer.

Jassy, décembre 1916.

---

## NOTIONS D'ARITHMOGÉOMÉTRIE

(3<sup>e</sup> article)<sup>1</sup>

PAR

Emile TURRIÈRE (Montpellier).

---

### Les quartiques gauches.

43. — MÉTHODE DU PLAN OSCULATEUR. — De même que, sur une cubique plane dont l'équation a ses coefficients rationnels, l'existence de deux arithmopoints quelconques entraîne *par alignement* celle d'un troisième arithmopoint, sur une quartique gauche d'équations rationnelles l'existence de trois arithmopoints particuliers quelconques entraîne celle d'un quatrième arithmopoint, trace de la courbe gauche sur l'arithmoplan défini par les trois arithmopoints connus.

Le plan défini par une tangente en un arithmopoint d'une quartique gauche et par un autre arithmopoint rencontre la courbe en un nouvel arithmopoint.

Enfin, le plan osculateur en un arithmopoint rencontre à nouveau la quartique gauche en un nouvel arithmopoint.

---

<sup>1</sup> Voir *L'Enseignement mathématique*, 18<sup>e</sup> année, 15 mars 1916, pp. 81-110, et 15 novembre 1916, pp. 397-428.



Cette remarque donne naissance à une méthode analogue à celle du *point tangentiel* pour les cubiques planes et permettant de rattacher par une voie itérative une suite d'arithmopoints à tout arithmopoint d'une quartique gauche. Cette méthode du *plan osculateur* consistera à partir d'un arithmopoint connu *a priori*  $M_1$ ; le plan osculateur à la quartique gauche en  $M_1$  rencontrera la courbe gauche en un second point  $M_2$ ; le plan osculateur en  $M_2$  donnera un autre arithmopoint  $M_3$  ... et ainsi de suite: de l'arithmopoint  $M_{k-1}$  se déduira un arithmopoint  $M_k$  qui sera la trace de la quartique sur le plan osculateur de  $M_{k-1}$ .

44. — LES ÉQUATIONS DES NOMBRES CONGRUENTS. — J'ai déjà<sup>1</sup> donné un exemple de l'application de la méthode du plan osculateur à l'occasion des équations indéterminées simultanées

$$x^2 + a = y^2, \quad x^2 + b = z^2.$$

Pour  $a + b = 0$  elles ne sont autres que les équations des nombres congruents qui ont donné lieu à des travaux remarquables de Léonard DE PISE, Edouard LUCAS, A. GENOCCHI et Mathew COLLINS. Impossibles pour  $a = 1, 2, 3, 10, 11, 17, 19, \dots$ , elles sont possibles pour  $a = 5, a = 6$ , par exemple.

Pour  $a = 5, b = -5$  ce sont les équations du problème proposé par Jean DE PALERME à Léonard DE PISE, qui en a donné la solution

$$x = 3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{41}{12}.$$

Pour  $a = 6, b = -6$ , on se trouve en présence d'un système d'équations étudié par Ed. LUCAS<sup>2</sup>. Partant de la solution simple :

$$x = \frac{5}{2}, \quad y = \frac{7}{2}, \quad z = \frac{1}{2},$$

<sup>1</sup> Le problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise, *L'Enseignement mathématique*, XVII<sup>e</sup> année, septembre-novembre 1915 (p. 315-324).

<sup>2</sup> Edouard LUCAS, *Sur la résolution des systèmes d'équations*  $x^2 - 6y^2 = u^2, x^2 + 6y^2 = v^2$ , *Nouvelles Annales de Mathématiques* [2], t. XV, 1876, p. 466-469.

Ed. LUCAS forme les nouvelles solutions moins évidentes :

$$x_1 = \frac{1201}{140}, \quad y_2 = \frac{1249}{140}, \quad z_1 = \frac{1151}{140},$$

$$x'_1 = \frac{2 \cdot 639 \cdot 802}{7 \cdot 776 \cdot 485}, \quad y'_1 = \frac{10 \cdot 113 \cdot 607}{7 \cdot 776 \cdot 485}, \quad z'_1 = \frac{4 \cdot 319 \cdot 999}{7 \cdot 776 \cdot 485};$$

les formules de récurrence qu'il indique ne sont d'ailleurs pas distinctes de celles que j'ai trouvées en application de la méthode du point tangentiel sur une cubique plane :

$$x_1 = \frac{ab - x^4}{2xyz}, \quad y_1 = \frac{x^2y^2 + az^2}{2xyz}, \quad z_1 = \frac{x^2z^2 + by^2}{2xyz}.$$

Des propositions générales sur l'impossibilité des équations des nombres congruents ont été données par A. GENOCCHI<sup>1</sup> (par exemple lorsque  $a$  est un nombre premier de la forme  $8m + 3$  ou le double d'un nombre premier de la forme  $8m + 5$ ); le même auteur s'est occupé d'ailleurs dans le même travail du cas  $a + b \neq 0$ . Elles ont aussi été considérées par Ed. LUCAS<sup>2</sup> dans ses recherches sur les travaux de Léonard DE PISE.

#### 45. — Les équations simultanées homogènes

$$x^2 + ay^2 = z^2,$$

$$ax^2 + y^2 = t^2,$$

ont été traitées de même<sup>3</sup>; pour  $a = 7$ , elles admettent une solution simple

$$x = 3, \quad y = 1, \quad z = 4, \quad t = 8,$$

<sup>1</sup> A. GENOCCHI, *Sur l'impossibilité de quelques équations doubles*, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 1874, t. 78, p. 433-435.

<sup>2</sup> Ed. LUCAS, *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise et sur diverses questions d'arithmétique supérieure*, *Bollettino di bibliografia* (du prince Boncompagni), 1877. LUCAS cite Léonard de PISE, Lucas PACIOLI, L. EULER, Mathew COLLINS et A. GENOCCHI.

Au sujet des mêmes équations des nombres congruents, voir aussi la question n° 4472 de *l'Intermédiaire des mathématiciens* (1915, p. 52, et p. 231) par M. A. GÉRARDIN; on y trouve des listes étendues de valeurs de  $a$  pour lesquelles les équations sont possibles ou impossibles.

<sup>3</sup> *L'Intermédiaire des mathématiciens*, 1916, p. 63. L'auteur de la solution indique précisément la méthode du plan osculateur, ainsi que celle d'une quadrique ayant avec la courbe sept intersections confondues au point initial; le huitième point d'intersection est une nouvelle solution. Il traite ensuite la question au moyen des fonctions elliptiques d'un même paramètre  $u$  et signale toute une série de solutions de paramètres  $-3u$ ,  $-7u$ ,  $-11u$  ... déduites d'une solution initiale de paramètre  $u$ .

dont il est possible de déduire la solution

$$x = -447, \quad y = 1121, \quad z = 3004, \quad t = -1688.$$

M. A. GÉRARDIN<sup>1</sup> a d'ailleurs signalé un cas particulier de possibilité de cette équation. C'est celui pour lequel le nombre  $a$  est de la forme suivante :

$$a = \lambda^2 + 2\lambda + 4.$$

Dans ce cas, on peut prendre :

$$x = \lambda, \quad y = \lambda + 2, \quad z = \lambda^2 + 3\lambda + 4, \quad t = \lambda^2 + \lambda + 2.$$

Le cas de  $a$  carré a été traité par L. EULER en 1780<sup>2</sup>.

46. — Comme autre exemple, je signalerai encore celui du problème de la *détermination de deux parallélépipèdes rectangles à arêtes rationnelles, équivalents et isodiagonaux*. On impose une des arêtes de l'un des volumes et deux arêtes de l'autre.

Soient  $x, y, c$  les arêtes de l'un des parallélépipèdes ;  $c$  est connu et  $x, y$  sont deux inconnues. Les arêtes du second volume seront de même  $a', b', z'$  ;  $a', b'$  sont donnés et  $z'$  est inconnu. Il s'agit alors d'étudier le système suivant d'équations entre  $x, y$  et  $z'$  :

$$\begin{cases} xyc = a'b'z' , \\ x^2 + y^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + z'^2 ; \end{cases}$$

elles représentent, par rapport à des axes coordonnés,  $(Ox, Oy, Oz')$  une biquadratique gauche intersection d'un parabolôïde hyperbolique avec un hyperbolôïde de révolution. Par la transformation définie au moyen des formules

$$X = \frac{c}{a'b'}(x + y),$$

$$Y = \frac{c}{a'b'}(x - y),$$

$$Z = \frac{c}{a'b'} \cdot z',$$

<sup>1</sup> *Loc. cit.*, p. 64.

<sup>2</sup> C. f. *Commentationes arithmeticae*, 1849, t. II, pp. 425-437.

et par conséquent constituée par une affinité et une rotation autour de  $Oz'$ , les équations de la biquadratique gauche deviennent :

$$X^2 = (Z + 1)^2 - K, \quad Y^2 = (Z - 1)^2 - K.$$

$K$  est une constante égale à  $\frac{(c^2 - a'^2)(c^2 - b'^2)}{a'b'^2}$ . Cette valeur particulière de  $K$  assure à la biquadratique transformée l'existence d'un arithmopoint particulier

$$X_0 = \frac{c(a' + b')}{a'b'}, \quad Y_0 = \frac{c(a' - b')}{a'b'}, \quad Z_0 = \frac{c^2}{a'b'},$$

correspondant à la solution banale constituée par deux parallélépipèdes égaux.

La méthode du plan osculateur pourra être appliquée à tout arithmopoint  $(x_0, y_0, z_0)$  de la biquadratique d'équations :

$$X^2 + k = (Z + 1)^2, \quad Y^2 + k = (Z - 1)^2,$$

le plan osculateur au point  $(x_0, y_0, z_0)$  ayant pour équation

$$-x_0^2 X + y_0^2 Y + 2(z_0^2 + 1 - K)Z = -6z_0(z_0^2 + 1 - K).$$

Je n'insiste pas sur ce problème qui peut être traité d'une autre manière et rattaché à des cubiques planes remarquables signalées par Edouard LUCAS. (Voir §§ 61, 62 et 63.)

Je pense que ces divers exemples, étudiés par une méthode très élémentaire, suffisent amplement pour justifier l'introduction de ces considérations d'arithmogéométrie. Ils prouvent d'ailleurs qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser des résultats de la théorie des fonctions elliptiques pour aborder systématiquement l'étude de ces questions de théorie des nombres.

#### 47. — MÉTHODE DE LA QUADRIQUE PASSANT PAR SEPT POINTS.

— Une méthode analogue à celle du plan osculateur découle du fait bien connu que toutes les quadriques passant par sept points communs passent par un huitième point fixe.

Supposons qu'on connaisse sept arithmopoints particuliers d'une *biquadratique gauche* définie comme intersection de

deux quadriques  $Q_1 = 0$  et  $Q_2 = 0$ . On formera alors l'équation d'une quadrique passant par ces sept arithmopoints mais n'appartenant pas au faisceau ponctuel défini par les quadriques  $Q_1 = 0$  et  $Q_2 = 0$ . Soit  $Q_3 = 0$  une telle quadrique. Les équations simultanées

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad Q_3 = 0,$$

auront pour solutions les coordonnées d'un système de huit points, auxquels appartiendront les sept points connus *a priori*. De sorte que, de ces sept arithmopoints, ce procédé permettra de déduire un huitième arithmopoint.

Les sept arithmopoints initiaux peuvent être confondus en un seul arithmopoint : on possède donc une nouvelle méthode de récurrence entre arithmopoints d'une biquadratique gauche, absolument analogue à celle du plan osculateur.

48. — RÉDUCTIBILITÉ DE L'ÉTUDE ARITHMOGÉOMÉTRIQUE D'UNE QUARTIQUE GAUCHE A CELLE D'UNE CUBIQUE PLANE. — Une autre voie est ouverte dans l'étude arithmogéométrique d'une quartique gauche représentée par des équations à coefficients rationnels et douée d'un arithmopoint particulier connu *a priori*.

Cette étude n'est pas distincte, en effet, de celle d'une cubique plane, qui a fait l'objet des §§ 40, 41 et 42. La cubique plane associée à la quartique gauche n'est autre que la perspective de celle-ci, le point de vue se trouvant à l'arithmopoint connu *a priori*.

Pratiquement, on projetera la quartique gauche en prenant pour centre de projection l'arithmopoint connu *a priori* sur un plan de projection dont le choix sera effectué, dans chaque cas particulier, par des considérations de symétrie, d'élégance ou de simplicité des équations.

La cubique plane perspective de la quartique de l'espace admet pour arithmopoint particulier la trace sur le plan de projection de l'arithmodroite tangente à la quartique au point de vue.

C'est ainsi que les équations des nombres congruents

$$x^2 + a = y^2, \quad x^2 + b = z^2$$

ont pu de diverses manières être ramenées à une équation représentant une cubique plane douée d'arithmopoints<sup>1</sup>.

49. — PROBLÈME DE FERMAT : ARITHMOTRIANGLES PYTHAGORIQUES DONT L'HYPOTÉNUSE ET LA SOMME OU LA DIFFÉRENCE DES CATHÈTES SONT DES NOMBRES CARRÉS PARFAITS. — L'étude des triangles pythagoriques à côtés rationnels dont l'hypoténuse est mesurée par un carré et dont la somme des cathètes est un carré a été faite par LEIBNIZ<sup>2</sup>, FERMAT, EULER<sup>3</sup> et LAGRANGE. La plus petite solution de ce problème est constituée par le triangle dont les cathètes ont pour mesures :

$$1 \cdot 061 \cdot 652 \cdot 293 \cdot 520 .$$

$$4 \cdot 565 \cdot 486 \cdot 027 \cdot 761 .$$

La somme des cathètes est le carré du nombre  $2 \cdot 372 \cdot 159$  ; l'hypoténuse est égale à  $(2 \cdot 165 \cdot 017)^2$ .

Je vais appliquer les considérations qui précèdent au problème beaucoup plus général des arithmotriangles pythagoriques dont l'hypoténuse et la *somme ou la différence* des cathètes sont mesurées par des nombres carrés parfaits.

Soient  $x, y$  deux nombres rationnels algébriques dont les valeurs absolues sont par convention les rapports des cathètes à l'hypoténuse d'un triangle de cette espèce. Il s'agit ainsi de procéder à l'étude du système des deux équations

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x + y = z^2,$$

admettant les solutions banales ( $x = 1, y = 0, z = 1$ ) ( $x = 0, y = 1, z = 1$ ). Ces équations représentent respectivement un cylindre de révolution et un cylindre parabolique, de sorte que leur ensemble représente une biquadratique gauche douée d'un arithmopoint particulier, dont il est possible par symétries de déduire trois autres arithmopoints.

<sup>1</sup> Cf. *L'Enseignement mathématique*, XVII<sup>e</sup> année, 1915, p. 317 et 321.

<sup>2</sup> Je cite LEIBNIZ d'après EULER : « Hoc problema a Leibnizio olim propositum » [Commentationes arithmeticae, t. II, p. 44-52, Miscellanea analytica, 15 novembre 1773, § 4, p. 47-48].

<sup>3</sup> L. EULER a consacré deux mémoires à ce problème :

a) De tribus pluribusve numeris inveniendis, quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa biquadratum, 18 mai 1780; Commentationes arithmeticae, édition de 1849, t. II, p. 397-402. La solution particulière rapportée dans le texte ci-dessus est indiquée dans cette pièce.

b) Solutio problematis Fermatiani de duobus numeris, quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa liquadratum, ad mentem Ill. Lagrange adornata, 5 juin 1780; Commentationes arithmeticae, ibid., pp. 403-405.

La distinction entre les solutions des deux problèmes distincts qui se traduisent par ces mêmes équations se fait aisément. Les nombres  $(x, y)$  peuvent, en effet, être soit tous deux positifs, soit de signes contraires. Dans le premier cas, on se trouve en présence du problème de Fermat proprement dit ; pour  $x$  et  $y$  de signes contraires, c'est la différence des cathètes qui est mesurée par un carré parfait. D'ailleurs, le seul examen de  $z$  permet d'effectuer autrement la même distinction ; il résulte, en effet, de l'équation

$$2xy = z^2 - 1 ,$$

que les solutions du problème de Fermat proprement dit correspondent aux arcs de la biquadratique extérieurs à l'espace limité aux deux plans parallèles  $z = \pm 1$ . Les arithmopoints de la biquadratique situés entre ces deux plans parallèles sont au contraire associés à des arithmotriangles pythagoriques pour lesquels la différence des cathètes est un carré parfait.

Le cône du troisième degré admettant la biquadratique considérée pour courbe directrice, le sommet étant l'arithmopoint  $(x = 1, y = 0, z = 1)$ , a pour équation par rapport à des axes issus de son sommet et parallèles aux axes primitifs :

$$(X^2 + Y^2)(X + Y - 2Z) + 2XZ^2 = 0 ;$$

de sorte que la cubique d'équation

$$(X^2 + Y^2)(X + Y - 2) + 2X = 0$$

est une perspective de la biquadratique gauche. La correspondance entre les nombres  $(x, y, z)$  et  $(X, Y)$  s'effectue par les formules

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{Y^2 - X^2}{Y^2 + X^2} , \quad y = -\frac{2XY}{X^2 + Y^2} , \quad z = X + Y - 1 , \\ X = \frac{x - 1}{z - 1} , \quad Y = \frac{y}{z - 1} . \end{array} \right.$$

La séparation entre les arcs associés aux deux problèmes considérés se fait au point à l'infini de cette cubique circu-



laire, au point à distance finie d'intersection avec l'asymptote  $X + Y = 2$ , à l'origine  $O$  des coordonnées et au point autre que  $O$ , situé à distance finie, d'intersection avec la parallèle menée par  $O$  à cette asymptote. Les deux arcs compris entre ces deux droites parallèles ( $X + Y = 0$ ,  $X + Y = 2$ ) correspondent à la différence des cathètes, tandis que les deux autres arcs extérieurs à ces deux droites parallèles correspondent au problème de Fermat. Deux arithmopoints alignés avec le point  $O$  correspondent toujours au même problème.

Une des solutions remarquables de la question, ainsi trouvée au moyen des alignements sur cette cubique, est celle qui correspond au triangle rectangle de côtés 119, 120 et 169.

La méthode du plan osculateur peut aussi être appliquée avec intérêt à la biquadratique étudiée. Pour simplifier les calculs, il est avantageux d'introduire une variable auxiliaire  $\delta$  définie par la relation

$$x - y = 2\sqrt{\delta} ;$$

de sorte que l'on doit poser :

$$x = \frac{1}{2}z^2 + \sqrt{\delta} ,$$

$$y = \frac{1}{2}z^2 - \sqrt{\delta} ,$$

$$z^4 = 2 - 4\delta .$$

Avec ces notations, l'équation du plan osculateur de la biquadratique au point de coordonnées  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  et du paramètre  $\delta_0$  est :

$$(2x_0\delta_0 + z_0^2)x + (2y_0\delta_0 + z_0^2)y - 2z_0^3z = 6\delta_0 - 2 .$$

Ce plan osculateur rencontre à nouveau la courbe gauche en un point de cote  $z_1$ , dont l'expression peut être donnée en fonction de  $z$  seul,

$$z_1 = z \cdot \frac{-12 + 12z^4 + z^8}{4 + 12z^4 - 3z^8} ,$$

ou, plus simplement, en fonction de  $z$  et de  $\delta$  :

$$z_1 = z \cdot \frac{1 - 4\delta + \delta^2}{1 - 3\delta^2} .$$



Les paramètres  $\delta$  et  $\delta_1$  sont liés entre eux par la relation

$$\pm \sqrt{\frac{\delta_1}{\delta}} = \frac{\delta^4 + 12\delta^3 - 18\delta^2 + 12\delta - 3}{(3\delta^2 - 1)^2}.$$

On observera enfin que la condition  $z^2 - 1 > 0$ , caractéristique des solutions du problème primitivement étudié par FERMAT se traduit ici par l'inéquation  $\delta < \frac{1}{4}$ .

La solution banale  $x = 1, y = 0, z = 1$  correspond précisément au cas limite  $\delta = \frac{1}{4}$ ; elle appartient d'ailleurs indifféremment aux deux problèmes. La formule de récurrence ci-dessus écrite, entre  $\delta_1$  et  $\delta$ , donne alors pour  $\delta = \frac{1}{4}$  la valeur suivante de  $\delta_1$  :

$$\delta_1 = \frac{57 \cdot 121}{114 \cdot 244}$$

qui, supérieure à  $\frac{1}{4}$ , correspond au second problème; elle conduit à la solution

$$x_1 = -\frac{119}{169}, \quad y_1 = \frac{120}{169}, \quad z_1 = \frac{1}{13},$$

déjà signalée à propos de la cubique perspective de la biquadratique gauche.

### Généralisation des équations de Brahmagupta-Fermat.

50. — L'étude des équations  $Ax^4 + Bx^3 = f(x, y)$  dans lesquelles  $f(xy)$  est un polynôme quelconque du second degré des deux variables  $x$  et  $y$  se ramène immédiatement à l'étude arithmogéométrique d'une biquadratique gauche par l'introduction d'une nouvelle variable auxiliaire. Une telle équation

$$Ax^4 + Bx^3 = f(x, y)$$

peut, en effet, être considérée comme représentant dans le plan  $Oxy$  une courbe du quatrième degré, projection d'une

biquadratique de l'espace. Cette courbe gauche est l'intersection d'un cylindre parabolique

$$x^2 = z$$

avec une quadrique d'équation :

$$Az^2 + Bxz = f(x, y) .$$

51. — EQUATIONS DE BRAHMAGUPTA-FERMAT GÉNÉRALISÉES. — Une première extension toute naturelle des équations de Brahmagupta-Fermat

$$Ax^2 + Bx + C = y^2$$

est l'équation

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = y^2 ;$$

son étude se rattache immédiatement à celle d'une cubique plane. (Voir § 42).

Il en est de même des équations plus générales :

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = y^2 .$$

Pour traiter arithmogéométriquement une équation de cette espèce, il suffit de poser  $x^2 = z$  de sorte qu'elle représente une quartique plane projection sur le plan  $Oxy$  de la biquadratique gauche d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} Az^2 + Bxz + Cz + Dx + E = y^2 , \\ x^2 = z . \end{array} \right.$$

Les cas où  $A$  ou  $E$  seront carrés parfaits permettront de trouver immédiatement une série de solutions.

Parmi les équations de Brahmagupta-Fermat généralisées au sens qui précède, il convient de mentionner d'une manière toute spéciale celles qui admettent pour premier membre un trinôme bicarré en  $x$  et plus particulièrement encore les équations

$$x^4 + Ax^2 + B^2 = \square .$$

En posant

$$x + \frac{B}{x} = X ,$$

cette équation devient

$$X^2 + A - 2B = \square ;$$

de sorte que toute équation du type

$$x^4 + Ax^2 + B^2 = \square ,$$

est équivalente au système

$$X^2 + a = \square \quad X^2 + b = \square$$

des équations des nombres congruents. Les constantes  $A, B, a, b$  qui figurent dans ces diverses équations sont liées entre elles par les conditions

$$a = A - 2B , \quad b = -4B .$$

L. EULER affirma l'impossibilité pour  $k = 1, 3, 5, 6, -14,$  etc., ... de

$$x^4 + kx^2 + 1 = \square .$$

L'équivalence précédente fut indiquée par A. GENOCCHI dans le mémoire cité au § 44.

L'équation

$$x^4 - 4x^2 + 1 = \square$$

fut enfin traitée par Ed. LUCAS [*Recherches sur l'analyse indéterminée*, Moulins, 1873, p. 67; *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise*, p. 120].

52. — PROBLÈME DES ARITHMODISTANCES POUR UNE HYPERBOLE ÉQUILATÈRE OU UNE LEMNISCATE DE BERNOULLI. — Il arrive très fréquemment que ce genre d'équations de Brahmagupta-Fermat intervienne dans les problèmes des arithmodistances pour certaines courbes. C'est ainsi que le problème des arithmodistances pour l'hyperbole équilatère et son centre de symétrie ou encore pour la lemniscate de Bernoulli et son point double (transformée de l'hyperbole équilatère par inversion) se traduit analytiquement par l'équation

$$y^2 = 1 + x^4 .$$

Celle-ci est impossible et n'admet que la solution banale  $x = 0$ . Cette impossibilité résulte du théorème négatif de

FERMAT sur l'équation  $x^4 + y^4 = z^2$  ou encore du théorème dû à FRÉNICLE de non-existence d'arithmotriangle pythagorique dont l'aire soit double d'un carré. (Voir à ce sujet § 6 de ma note sur *Le problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise*).

Cette impossibilité est encore équivalente à celle de  $\tan \theta = y^2$ ,  $\tan \frac{\theta}{2}$  étant rationnel. En d'autres termes il n'existe pas d'arithmotriangle pythagorique dont le rapport des cathètes soit un carré parfait.

53. — PROBLÈME DES ARITHMODISTANCES POUR UNE ARITHMOCONIQUE — Plus généralement, étant donnée une conique douée d'arithmopoints et, par suite, représentable par des équations

$$x = \frac{f_2}{h_2}, \quad y = \frac{g_2}{h_2},$$

dans lesquelles  $f_2$ ,  $g_2$  et  $h_2$  sont des polynômes du second degré d'une même variable  $t$ , le problème des arithmodistances pour cette arithmoconique et pour un arithmopoint du plan, — qui peut sans restriction de généralité être pris pour origine des coordonnées, — se traduit par l'équation

$$\frac{f_2^2 + g_2^2}{h_2^2} = \text{carré parfait} ;$$

ou encore  $f_2^2 + g_2^2 = Y^2$ . De sorte qu'en explicitant la variable  $t$  on est ramené à une équation de la forme

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = y^2 .$$

Ce résultat s'étend d'ailleurs au cas d'une arithmoconique de l'espace. On a alors

$$x = \frac{f_2}{h_2}, \quad y = \frac{g_2}{h_2}, \quad z = \frac{k_2}{h_2} ;$$

on est par suite amené à une équation

$$f_2^2 + g_2^2 + k_2^2 = Y^2 ,$$

qui, après développement, donne encore une équation de Brahmagupta-Fermat du quatrième ordre.

La réciproque n'est pas exacte. Toute équation

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = y^2$$

ne serait susceptible d'être rattachée à un problème d'arithmodistance pour une arithmoconique de l'espace, ni *a fortiori* pour une arithmoconique de l'espace. Les équations pour lesquelles A et E ne sont pas sommes de deux ou trois carrés ne sont pas susceptibles d'une telle interprétation géométrique : par exemple aucune des équations

$$y^2 = x^4 - 1, \quad y^2 = x^4 + 7,$$

ne peut être associée à une arithmoconique de l'espace ou du plan au titre de courbe représentative de l'équation du problème des arithmodistances.

### Le problème de Bhaskara et les équations

$$\varphi(x, y) = u^2, \quad \psi(x, y) = v^2.$$

54. — LE PROBLÈME DE BHASKARA. — Le système des deux équations indéterminées

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &= u^2, \\ x^2 - y^2 - 1 &= v^2, \end{aligned}$$

à quatre inconnues  $x, y, u, v$ , dont BHASKARA<sup>1</sup> a donné les trois solutions particulières suivantes dépendant d'un paramètre rationnel arbitraire

$$\left\{ \begin{aligned} x &= 8\lambda^2 + 1, & y &= 8\lambda^2, \\ x &= \lambda + \frac{1}{2\lambda}, & y &= 1, \\ x &= \frac{(8\lambda^2 - 1)^2}{8\lambda^2}, & y &= \frac{8\lambda^2 - 1}{2\lambda}, \end{aligned} \right.$$

<sup>1</sup> *Le Lilavati*, section IV, règle 59-60. Cf. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, question 206, [2], t. VIII, 1849, p. 107; E. CLÈRE en donna une solution incomplète, t. IX, 1850, pp. 116-118.

et dont la solution générale a été obtenue par A. GENOCCHI<sup>2</sup>, pourrait de diverses manières être rattaché aux considérations qui précèdent, en supposant que l'une des inconnues prend une valeur précisée, ou encore que  $u$  et  $v$ , par exemple, sont deux fonctions linéaires d'une variable  $z$  à coefficients rationnels et connus. On pourrait aussi songer à des considérations d'hypergéométrie.

Je me bornerai à signaler que le système des deux équations de Bhaskara est équivalent au système suivant :

$$2(x^2 - 1) = u^2 + v^2, \quad 2y^2 = u^2 - v^2;$$

il suffit de poser

$$\begin{aligned} u + v &= 2y\lambda, & u - v &= \frac{y}{\lambda}, \\ 2\frac{x}{y} &= X, & \frac{2}{y} &= Y, \end{aligned}$$

pour réduire toute la question à l'étude arithmogéométrique d'une surface *unicursale* du quatrième degré d'équation

$$X^2 - Y^2 = 4\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2}$$

en coordonnées cartésiennes  $(X, Y, \lambda)$ . En posant alors

$$X + Y = \frac{4\lambda^4 + 1}{\lambda\mu}, \quad X - Y = \frac{\mu}{\lambda},$$

il vient ainsi :

$$x = \frac{4\lambda^4 + 1 + \mu^2}{4\lambda^4 + 1 - \mu^2}, \quad y = \frac{4\lambda\mu}{4\lambda^4 + 1 - \mu^2}.$$

Telle est la solution générale dépendant de deux paramètres rationnels arbitraires,  $\lambda$  et  $\mu$ , des deux équations de Bhaskara.

55. — Les équations, analogues aux précédentes,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 1 &= u^2, \\ x^2 + y^2 - 1 &= v^2, \end{aligned}$$

<sup>2</sup> Angelo GENOCCHI, Solution de la question 206, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, [2], t. X, 1851, p. 80-85.

se traitent de la même manière. Elles sont équivalentes aux équations

$$\begin{aligned} 2 &= u^2 - v^2 , \\ 2(x^2 + y^2) &= u^2 + v^2 ; \end{aligned}$$

en posant donc

$$u = \lambda + \frac{1}{2\lambda} , \quad v = \lambda - \frac{1}{2\lambda} ,$$

l'étude de ces équations est ramenée à celle d'une surface unicursale du quatrième degré représentée par l'équation (en coordonnées cartésiennes  $x, y, \lambda$ ) :

$$x^2 + y^2 = \lambda^2 + \frac{1}{4\lambda^2} .$$

Cette surface peut être envisagée comme engendrée par un arithmocercle passant par l'arithmopoint  $(x = \lambda, y = \frac{1}{2\lambda})$ , de sorte que les expressions rationnelles des coordonnées d'un point quelconque de la surface s'obtiennent en posant  $\text{tang} \frac{\theta}{2} = t$  et

$$\begin{cases} x = \lambda \cos \theta + \frac{1}{2\lambda} \sin \theta , \\ y = \lambda \sin \theta - \frac{1}{2\lambda} \cos \theta . \end{cases}$$

La solution générale du système des deux équations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = u^2 , \\ x^2 + y^2 - 1 = v^2 , \end{cases}$$

est ainsi

$$x = \frac{\lambda(1 - t^2) + \frac{t}{\lambda}}{1 + t^2} , \quad y = \frac{2\lambda t - \frac{1 - t^2}{2\lambda}}{1 + t^2} .$$

56. — Le système formé par les deux équations simultanées, encore analogues aux équations de Bhaskara :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &= u^2 , \\ x^2 - y^2 + 1 &= v^2 , \end{aligned}$$

peut être traité par un procédé semblable, à la seule différence que la surface unicursale qui se présente ici est du troisième degré. De l'équation

$$2x^2 = u^2 + v^2$$

et des résultats du § 5, il résulte qu'il faut poser actuellement

$$\begin{aligned} u &= x(\cos \theta + \sin \theta) , \\ v &= x(\cos \theta - \sin \theta) , \end{aligned}$$

$\operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = t$  étant un nombre rationnel arbitraire. En portant ensuite ces expressions de  $u$  et de  $v$  dans l'équation

$$u^2 - v^2 = 2(y^2 - 1) ,$$

il vient

$$t(1 - t^2) = \frac{(1 + t^2)^2}{4x^2} (y^2 - 1) ,$$

de sorte que l'étude des équations proposées est réductible à celle d'une surface cubique unicursale d'équation

$$Z(1 - Z^2) = X^2 - Y^2 .$$

Les expressions générales des solutions  $(x, y)$ , en fonction de deux paramètres, obtenues par ce procédé, sont les suivantes :

$$x = \frac{2\lambda(1 + t^2)}{2\lambda^2 t(1 + t^2) - 1} , \quad y = \frac{2\lambda^2 t(1 + t^2) + 1}{2\lambda^2 t(1 + t^2) - 1} .$$

**57. — THÉORÈME FONDAMENTAL SUR LES ÉQUATIONS SIMULTANÉES**

$$\varphi(x, y) = u^2 , \quad \psi(x, y) = v^2 .$$

Les équations de Bhaskara et autres équations analogues qui viennent d'être résolues dans les trois paragraphes précédents appartiennent à la classe très générale d'équations du type  $\varphi(x, y) = u^2$ ,  $\psi(x, y) = v^2$ , ou  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux polynômes à coefficients rationnels en  $x$  et  $y$ , et qui sont douées d'une solution particulière manifestement connue *a priori* : les équations de Bhaskara sont ainsi douées de la solution



( $x = 1, y = 0$ ); les équations du § 56 sont douées de la solution ( $x = 0, y = 1$ ). Quant aux équations du § 55, il est facile d'obtenir une solution telle que  $x = \frac{1}{2}, y = 1$ .

Il est important d'observer que le problème actuel de deux équations à quatre indéterminées, qui semblerait se rattacher à des considérations d'arithmogéométrie pour un hyperespace à quatre dimensions est réductible à une étude arithmogéométrique d'une surface de l'espace ordinaire.

D'une manière précise et en se bornant, pour fixer les idées, au cas de deux équations quadratiques simultanées, il y a lieu d'énoncer le théorème fondamental suivant :

*Le système formé par deux équations simultanées quadratiques à quatre inconnues*

$$\varphi(x, y) = u^2, \quad \psi(x, y) = v^2,$$

*n'admet pas de solution en général. La connaissance d'une solution particulière entraîne la réductibilité de la question à l'étude arithmogéométrique d'une surface cubique.*

Soit, en effet, ( $x_0, y_0, u_0, v_0$ ) la solution connue *a priori*. Je pose alors

$$x = x_0 + \alpha t, \quad y = y_0 + \beta t, \quad u = u_0 + \gamma t, \quad v = v_0 + \delta t,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, t$  étant cinq indéterminées. Chacune des équations quadratiques données admet la solution  $t = 0$  et peut être résolue par rapport à  $t$ , de sorte que l'on obtient ainsi deux expressions différentes de  $t$

$$t = \frac{\Phi_1}{\Phi_2}, \quad t = \frac{\Psi_1}{\Psi_2},$$

sous formes de fractions rationnelles dont les numérateurs sont des formes linéaires en ( $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ) tandis que les dénominateurs sont des formes quadratiques par rapport aux mêmes variables. Il résulte de cette remarque que toute la question est réduite à l'étude arithmogéométrique de la surface du troisième degré dont l'équation est

$$\Phi_1 \Psi_2 - \Psi_1 \Phi_2 = 0$$

dans le système de coordonnées homogènes ( $\alpha \beta \gamma \delta$ ).

La réductibilité à l'étude arithmogéométrique d'une surface de l'espace ordinaire n'est évidemment pas particulière aux systèmes d'équations quadratiques. Lorsqu'en effet les équations  $\varphi = u^2$  et  $\psi = v^2$  à étudier sont de degrés plus élevés, la méthode précédente conduit à deux équations algébriques en  $t$ ; l'élimination de  $t$  permet alors de se ramener à l'étude d'une relation unique entre  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , homogène par rapport à ces mêmes variables.

La réductibilité à l'étude d'une surface cubique de l'espace ordinaire du système des deux équations quadratiques  $\varphi(x, y) = u^2$  et  $\psi(x, y) = v^2$  étant acquise, il faut maintenant observer que les conclusions du § 36 peuvent en outre être appliquées à la nouvelle équation cubique. *La surface cubique obtenue est précisément douée de trois arithmopoints non-singuliers.* Ce sont les arithmopoints de coordonnées respectives

$$\begin{aligned} \alpha = 0, & \quad \beta = 0, & \quad \gamma = 0, & \quad \delta \neq 0, \\ \alpha = 0, & \quad \beta = 0, & \quad \gamma \neq 0, & \quad \delta = 0, \\ \alpha = 0, & \quad \beta = 0, & \quad \gamma = u_0, & \quad \delta = v_0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire deux des sommets du tétraèdre de référence et un troisième point de l'arête qui les joint. La connaissance d'un seul de ces arithmopoints suffit pour assurer et diriger par le procédé du § 36 la représentation rationnelle de la surface cubique au moyen de deux paramètres indépendants.

Dans ces conditions, la *connaissance d'une solution particulière du système d'équations quadratiques généralisées de Bhaskara entraîne la résolubilité du système; la solution dépend de deux paramètres.* Si la représentation trouvée de la surface cubique est propre, cette solution est la solution générale.

### Arithmogéométrie autour des cubiques de Lucas.

58. — Pour un nombre assez considérable d'équations indéterminées ayant été l'objet de recherches spéciales, le groupement  $x^2 + y^2 + z^2$  intervient dans la structure de ces équations. Il semble donc qu'il y ait intérêt — et effective-

ment il y a très souvent un réel intérêt — de rattacher une équation de cette espèce à l'étude d'une arithmosphère.

C'est ainsi que, pour une courbe sphérique, tracée sur une sphère de rayon pris pour unité, les coordonnées d'un point quelconque et leurs dérivées des deux premiers ordres par rapport au paramètre qui repère le point courant de cette courbe sphérique sont liées par une identité due à E. CATALAN :

$$(x'^2 + y'^2 + z'^2)[(xy'' - yx'')^2 + (yz'' - zy'')^2 + (zx'' - xz'')^2] \\ = (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2 + [x(y'z'' - z'y'') + y(z'x'' - x'z'') + z(x'y'' - y'x'')]^2.$$

Cette identité donne une infinité de solutions de l'équation indéterminée

$$(P^2 + Q^2 + R^2)(P'^2 + Q'^2 + R'^2) = U^2 + V^2 ;$$

on en conclut, par exemple <sup>1</sup>,

$$(24^2 + 7^2 + 15^2)(30^2 + 36^2 + 23^2) = 375^2 + 1475^2 .$$

Mais en pareil cas il convient de ne pas se laisser fasciner par la présence du groupement  $x^2 + y^2 + z^2$ ; il peut y avoir au contraire avantage à chercher des solutions arithmogéométriques n'ayant absolument aucun rapport avec l'arithmosphère.

59. — L'ÉQUATION  $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ . Cette équation quadratique homogène à six indéterminées se rattache manifestement à l'arithmosphère. Si l'on se donne, en effet, arbitrairement les trois indéterminées  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , la détermination de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  n'est autre que la recherche d'un arithmopoint quelconque sur l'arithmosphère de centre O qui passe par l'arithmopoint de coordonnées  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ . L'équation considérée peut donc être résolue par une des méthodes indiquées au § 8 (représentation géographique, ou mieux : projection stéréographique).

La même équation peut être étudiée arithmogéométriquement d'une manière toute différente. J'observerai dans ce but que cette équation est susceptible d'une interprétation

<sup>1</sup> Question n° 1124 des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

géométrique remarquable. Etant considéré un triangle de référence ABC, si l'on prend sur les côtés des points A' sur BC, B' sur CA et C' sur AB, déterminant sur ces mêmes côtés six segments

$$\begin{aligned} BA' &= x, & A'C &= x', \\ CB' &= y, & B'A &= y', \\ AC' &= z, & C'B &= z', \end{aligned}$$

la condition nécessaire et suffisante de concours des perpendiculaires aux côtés en ces points A' B' C' est précisément la relation

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Cette remarque élémentaire faite, je supposerai que les sommes  $x + x'$ ,  $y + y'$  et  $z + z'$  sont imposées; soient :

$$x + x' = a, \quad y + y' = b, \quad z + z' = c.$$

Je suppose en outre que les nombres  $a, b, c$  peuvent être considérés comme étant les mesures des côtés d'un arithmotriangle héronien.

La solution générale de l'équation indéterminée dépend alors de  $a, b$  et  $c$  et de deux paramètres arbitraires. *Pour avoir cette solution générale, il suffira de se donner arbitrairement un arithmopoint du plan de l'arithmotriangle héronien et de le projeter sur les droites arithmodirigées qui portent les trois côtés de ce triangle : les six segments déterminés par ces trois projections constituent précisément la solution générale désirée.*

60. — L'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2$ , qui de son côté a fait aussi l'objet d'assez nombreuses remarques<sup>1</sup> se rattache à la précédente au titre de cas particulier. Les formules déduites de l'étude arithmogéométrique d'une arithmosphère de centre O et qui passe par l'arithmopoint des coordonnées  $(x', y'$  et 0) se simplifient du fait que l'arithmopoint connu *a priori* a sa cote nulle.

<sup>1</sup> Cette équation indéterminée  $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$  a été fréquemment considérée (question n° 3621 de *l'Intermédiaire des Mathématiciens*). Je pense toutefois que la solution géométrique ci-dessus doit être nouvelle.

<sup>1</sup> Question 4383 de *l'Intermédiaire des Mathématiciens*.

Cette équation comme la précédente est susceptible d'une solution dépendant de la considération de l'arithmotriangle héronien général. Ici toutefois la solution générale dépend des côtés de l'arithmotriangle héronien et d'un seul paramètre. Cette solution générale s'obtient, en effet, en supposant que l'arithmopoint que l'on projette sur les côtés du triangle n'est plus arbitraire dans le plan mais appartient à une autre droite arithmodirigée spéciale du plan (perpendiculaire en B à l'arithmodirigée AB).

61. — LE PROBLÈME DES PARALLÉLÉPIPÈDES RECTANGLES ÉQUIVALENTS ET ISODIAGONAUX. — Le problème du § 46 peut être étudié sous un nouveau point de vue et rattaché à l'étude arithmogéométrique de l'une ou l'autre de deux cubiques remarquables du plan d'un triangle. Ces cubiques ayant été l'objet de deux questions très précises posées par Ed. LUCAS, il m'a paru justifié de proposer de leur donner le nom de l'illustre géomètre, puisqu'il s'agit ici d'une application arithmologique que LUCAS aurait parfaitement pu suggérer, s'il ne l'a pas fait d'ailleurs dans des notes aujourd'hui perdues.

L'énoncé du problème des parallélépipèdes rectangles équivalents et isodiagonaux, au sujet desquels toutes mes recherches bibliographiques sont restées infructueuses, est le suivant :

*Etudier les couples de parallélépipèdes rectangles à arêtes rationnelles dont les diagonales sont égales, sans être nécessairement rationnelles, et dont les volumes sont équivalents.* Soient  $(x, y, z)$  et  $(x', y', z')$  les arêtes respectives des deux parallélépipèdes que l'on désire associer ainsi. Les équations du problème sont alors les suivantes :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 . \\ x \cdot y \cdot z = x' \cdot y' \cdot z' . \end{cases}$$

La question se traduisant ainsi par deux équations homogènes respectivement des second et troisième degrés à six inconnues, il convient de se donner arbitrairement trois conditions supplémentaires. Pour chaque choix de ces conditions supplémentaires, on aura à résoudre un problème du

genre de celui traité au § 44, où j'avais imposé une arête d'un des volumes et deux de l'autre.

Le problème des parallélépipèdes équivalents et isodiagonaux se rattache à des considérations particulièrement élégantes d'arithmogéométrie lorsqu'on impose les trois sommes formées avec une arête de chacun des deux parallélépipèdes. Soient, en effet,  $a, b, c$  les sommes

$$x + x' = a, \quad y + y' = b, \quad z + z' = c.$$

Pour simplifier, je supposerai que ces longueurs  $a, b, c$  sont les côtés d'un triangle; cette hypothèse nécessaire pour pouvoir introduire des considérations d'arithmogéométrie conduit à des formules qui sont plus généralement valables pour  $(a, b, c)$  absolument quelconques.

Si donc ABC est un triangle de côtés  $(a, b, c)$  et si  $(x, x', y, y', z, z')$  sont les mesures de six segments consécutifs, dans l'ordre même de ces lettres, pris sur les côtés BC, CA, AB du triangle, les équations ci-dessus écrites expriment des propriétés géométriques remarquables.

La relation de J. CÉVA,

$$xyz = x'y'z',$$

exprime le concours des trois droites AA', BB', CC'. Quant à la seconde relation

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

elle exprime que les perpendiculaires en A' B' C' aux côtés BC, CA, AB du triangle sont trois droites concourantes (§ 59).

Dans ces conditions, une solution particulière apparaît manifestement; elle est tellement remarquable qu'elle mérite d'être signalée avant de pousser plus loin l'étude générale du système d'équations ci-dessus. En se bornant au cas d'un triangle acutangle, *les parallélépipèdes rectangles admettant respectivement pour arêtes les segments d'ordre pair et d'ordre impair déterminés sur les côtés d'un triangle quelconque par les hauteurs du triangle sont des solutions particulières du problème.*

Si  $a, b, c$  désignent les mesures rationnelles des côtés du

triangle figuratif ABC, les expressions correspondantes des arêtes des deux parallélépipèdes associés sont :

$$\begin{aligned} x &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}, & x' &= \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}, \\ y &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}, & y' &= \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2b}, \\ z &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}, & z' &= \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2c}. \end{aligned}$$

C'est ainsi que le triangle de côtés (4, 5, 6) donne, après multiplication par 8, les deux parallélépipèdes rectangles d'arêtes respectives

$$\begin{aligned} x &= 27, & y &= 4, & z &= 30, \\ x' &= 5, & y' &= 36, & z' &= 18. \end{aligned}$$

62. — LA PREMIÈRE CUBIQUE D'ÉDOUARD LUCAS. — C'est aux cubiques qui font l'objet de la question suivante que se rattache l'étude générale du problème des parallélépipèdes rectangles équivalents et isodiagonaux. « On joint les trois sommets d'un triangle ABC à un point P et l'on prend les « intersections A' B' C' des lignes de jonction avec les côtés « opposés. Trouver le lieu des points P de telle sorte que les « perpendiculaires élevées sur les côtés aux points A' B' C' « se rencontrent en un même point Q. Ce lieu est une cubi- « que dont il est facile de déterminer seize points et trois « tangentes. Déterminer les asymptotes et, aussi, trouver le « lieu du point Q. »

Soient X, Y, Z les coordonnées barycentriques du point courant P de la première cubique de Lucas, le triangle ABC étant pris pour triangle de référence. La droite AP a pour équation

$$\frac{\eta}{Y} = \frac{\zeta}{Z},$$

<sup>1</sup> Ed. LUCAS, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2<sup>e</sup> série, t. XV, 1876, question n° 1207, p. 240. Solution p. 550-555 (DEWULF).

Énoncé analogue par Ed. LUCAS, *Nouvelle correspondance mathématique*, t. II, 1876, question n° 83, p. 94. Solutions : 1<sup>re</sup> partie, 1880, p. 56-65 et 2<sup>e</sup> partie, 1878, pp. 261-272 par H. van AUBEL.

Cf. aussi un article de H. van AUBEL, *Nouvelle correspondance mathématique*, t. V, 1879, p. 87, Sur un lieu géométrique (trouver le lieu des points Q tels que les perpendiculaires QA', QB', QC' abaissées sur les trois côtés d'un triangle ABC déterminent sur ces côtés des segments en involution).



et, par suite, les segments  $BA' = x$  et  $A'C = x'$  déterminés sur le côté  $\xi = 0$  sont entre eux dans le rapport  $\frac{x}{x'} = \frac{Z}{Y}$ . Les valeurs des six segments  $BA'$ ,  $A'C$ ,  $CB'$ ,  $B'A$ ,  $AC'$  et  $C'B$  sont donc

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \frac{Z}{Y + Z}, & x' &= a \cdot \frac{Y}{Y + Z}, \\ y &= b \cdot \frac{X}{Z + X}, & y' &= b \cdot \frac{Z}{Z + X}, \\ z &= c \cdot \frac{Y}{X + Y}, & z' &= c \cdot \frac{X}{X + Y}; \end{aligned}$$

la relation  $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$  donne alors l'équation de la première cubique de Lucas en ce système de coordonnées barycentriques :

$$a^2 \cdot \frac{Y - Z}{Y + Z} + b^2 \cdot \frac{Z - X}{Z + X} + c^2 \cdot \frac{X - Y}{X + Y} = 0.$$

Cette cubique se transforme en elle-même dans la transformation quadratique définie par les formules

$$XX_1 = YY_1 = ZZ_1$$

et qui est analogue à la transformation isogonale. Cette invariance de la cubique correspond à l'échange entre eux des deux parallélépipèdes associés.

En revenant au problème des parallélépipèdes rectangles équivalents et isodiagonaux, il résulte des considérations qui précèdent que sa solution générale s'exprime par les formules suivantes où  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sont des paramètres absolument quelconques (qui ne sont pas de toute nécessité les mesures des côtés d'un triangle  $ABC$ ) :

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \frac{Z}{Y + Z}, & x' &= a \cdot \frac{Y}{Y + Z}, \\ y &= b \cdot \frac{X}{Z + X}, & y' &= b \cdot \frac{Z}{Z + X}, \\ z &= c \cdot \frac{Y}{X + Y}, & z' &= c \cdot \frac{X}{X + Y}; \end{aligned}$$



X, Y, Z sont les coordonnées homogènes d'un arithmopoint quelconque de la cubique d'équation homogène

$$\sum a^2 \frac{Y - Z}{Y + Z} = 0$$

passant par les sommets du triangle de référence (qui n'est plus nécessairement le triangle A, B, C).

Il est essentiel de remarquer que la première cubique d'Edouard Lucas permet de résoudre le problème des parallélépipèdes lorsque  $a, b, c$  sont les mesures des côtés d'un triangle et que, si cette dernière condition n'est pas satisfaite, les formules obtenues gardent un sens et, par continuité, donnent la solution générale du même problème.

La première cubique de Lucas [ou sa généralisation pour le cas de  $a, b, c$  quelconques] est douée d'un certain nombre de points remarquables: les sommets ABC du triangle de référence, le centre de gravité, l'orthocentre, les sommets A, B, C, du triangle formé par les parallèles aux côtés de ABC, etc..... D'où *a priori* un certain nombre d'arithmopoints très simples

$$\begin{array}{lll} X = 0, & Y = 0, & Z = 1, \\ X = 0, & Y = 1, & Z = 0, \\ X = 1, & Y = 0, & Z = 0, \\ X = 1, & Y = 1, & Z = 1, \\ X = 1, & Y = 1, & Z = -1, \\ X = 1, & Y = -1, & Z = 1, \\ X = -1, & Y = 1, & Z = 1, \end{array}$$

$$X = b^2 + c^2 - a^2, \quad Y = c^2 + a^2 - b^2, \quad Z = a^2 + b^2 - c^2;$$

Ce dernier arithmopoint correspond, par exemple, au point transformé de l'orthocentre dans la transformation quadratique signalée précédemment.

**63.** — LA SECONDE CUBIQUE DE LUCAS. — Soient maintenant X, Y, Z les coordonnées trilineaires du point Q. Le théorème des projections donne immédiatement les expressions des

segments  $BA'$ ,  $A'C$ ... déterminés sur les côtés du triangle  $ABC$  par les projections de  $Q$  :

$$\begin{aligned} x &= \frac{Z + X \cos B}{\sin B}, & x' &= \frac{Y + X \cos C}{\sin C}, \\ y &= \frac{X + Y \cos C}{\sin C}, & y' &= \frac{Z + Y \cos A}{\sin A}, \\ z &= \frac{Y + Z \cos A}{\sin A}, & z' &= \frac{X + Z \cos B}{\sin B}; \end{aligned}$$

l'équation de la seconde cubique de Lucas résulte du théorème de J. CÉVA :

$$(Y + Z \cos A)(Z + X \cos B)(X + Y \cos C) = (Z + Y \cos A)(X + Z \cos B)(Y + X \cos C).$$

Cette cubique est invariante dans la transformation isogonale. Elle passe par les sommets  $A$ ,  $B$ ,  $C$  du triangle  $ABC$ , par l'orthocentre, par le centre du cercle circonscrit qui est d'ailleurs le centre de cette cubique, par les centres des quatre cercles tritangents aux côtés du triangle, par les points à l'infini des trois médiatrices qui sont asymptotes de la cubique.....

Revenons au problème des parallélépipèdes. Il résulte des considérations qui précèdent que l'on doit poser

$$x = \frac{2acZ + (a^2 + c^2 - b^2)X}{4S}, \quad x' = \frac{2abY + (a^2 + b^2 - c^2)X}{4S}, \dots$$

$S$  représentant la surface du triangle  $ABC$ ; l'équation de la seconde cubique de Lucas est alors :

$$\prod \frac{2acZ + (a^2 + c^2 - b^2)X}{2abY + (a^2 + b^2 - c^2)X} = 1.$$

Il est absolument indispensable de supposer actuellement que  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sont les mesures d'un véritable triangle et en outre que ce triangle est un *arithmotriangle héronien*. A la différence des considérations du paragraphe précédent relatif à la première cubique de Lucas, où aucune hypothèse restrictive n'était nécessaire sur la nature de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ce n'est actuellement que moyennant cette double condition que le

problème des parallélépipèdes restangles équivalents et isodiagonaux étudié sera susceptible d'être rattaché à l'étude des arithmopoints de la seconde cubique de Lucas.

64. — AUTRE DÉFINITION DE LA SECONDE CUBIQUE DE LUCAS. — Je crois devoir indiquer ici une propriété importante<sup>1</sup> qui peut servir à définir la seconde cubique de Lucas.

*La seconde cubique d'E. Lucas est le lieu des points Q du plan d'un triangle ABC tels que les droites QA, QB et QC soient normales en A, B et C à une même conique.*

Si l'on représente, en effet, en coordonnées trilineaires par rapport au triangle de référence ABC, une droite issue du sommet A par l'équation

$$Y = mZ ,$$

l'involution des droites orthogonales autour du point A, qui comprend comme couples de droites associées d'une part les deux bissectrices ( $m = 1$ ,  $m' = -1$ ) et d'autre part la hauteur AH ( $m = \frac{\cos C}{\cos B}$ ) et le parallèle au côté opposé BC ( $m' = -\frac{\sin C}{\sin B}$ ), est définie par l'équation

$$mm' + 1 + (m + m') \cos A = 0 .$$

Si donc  $(x, y, z)$  sont les coordonnées trilineaires du point Q du lieu étudié, les perpendiculaires en A, B et C aux droites QA, QB, QC ont pour équations respectives

$$Y = \alpha Z , \quad Z = \beta X , \quad X = \gamma Y ,$$

avec

$$\alpha = -\frac{z + \gamma \cos A}{y + z \cos A} , \quad \beta = -\frac{x + z \cos B}{z + x \cos B} , \quad \gamma = -\frac{y + x \cos C}{x + y \cos C} .$$

Il résulte, d'autre part, de l'équation générale d'une conique circonscrite à ABC,

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} = 0 ,$$

que les coefficients jouant le rôle de coefficients angulaires

<sup>1</sup> A porter au compte d'un auteur dont je ne puis préciser le nom, n'ayant pu retrouver la référence utile.

des tangentes aux sommets A, B, C du triangle de référence sont

$$\alpha = -\frac{\beta}{c}, \quad \beta = -\frac{c}{\alpha}, \quad \gamma = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que QA, QB, QC soient normales à une même conique en A, B et C est donc

$$\alpha\beta\gamma = -1;$$

elle se traduit, par conséquent, par l'équation

$$\begin{aligned} (z + y \cos A)(x + z \cos B)(y + x \cos C) \\ = (y + z \cos A)(z + x \cos B)(x + y \cos C) \end{aligned}$$

représentative de la seconde cubique d'E. LUCAS.

### Les arithmotriangles télémétriques.

65. — Le problème télémétrique conduit à la considération de triangles obtusangles particuliers ABC qui sont définis par la relation<sup>1</sup>

$$\sin 2C + 2 \sin 2B = 0, \quad \left( B > \frac{\pi}{2} \right).$$

J'appellerai triangles télémétriques les triangles de cette nature. Par exemple, les triangles d'angles

$$A = 30^\circ, \quad B = 105^\circ, \quad C = 45^\circ$$

qui peuvent être facilement construits à partir des triangles équilatéraux sont des triangles télémétriques particuliers.

Soient maintenant A' B' C' les pieds des hauteurs d'un triangle télémétrique. Le triangle pédal A' B' C' de ABC a pour angles

$$A' = 2A, \quad B' = 2B - \pi, \quad C' = 2C.$$

Il en résulte que la relation de définition d'un triangle télémétrique quelconque se traduit par une condition très sim-

<sup>1</sup> J.-E. ESTIENNE, Note sur les télémètres, *Revue d'artillerie*, novembre 1904.  
Jules RAIBAUD, Instruments d'optique, d'observation et de mesure, *Encyclopédie scientifique*, Paris, 1910, p. 321-322.

ple : *L'un des côtés du triangle pédal d'un triangle téléométrique est double d'un autre côté :*

$$A'B' = 2A'C' .$$

Cette relation très simple permet de résoudre graphiquement le problème téléométrique.

66. — LES ARITHMOTRIANGLES TÉLÉOMÉTRIQUES HÉRONIENS. — Le problème qui consiste à rechercher les arithmotriangles téléométriques, c'est-à-dire ceux de ces triangles téléométriques qui sont à côtés rationnels se rattache à l'étude arithmogéométrique d'une quartique plane. La relation entre les côtés  $a, b, c$  d'un triangle téléométrique général se déduit immédiatement de la condition

$$\sin 2C + 2\sin 2B = 0 ;$$

c'est la relation homogène

$$(b^2 - c^2)(c^2 - 2b^2) + (c^2 + 2b^2)a^2 = 0 .$$

En posant donc

$$\frac{c}{a} = x , \quad \frac{b}{a} = y ,$$

on réduit ainsi l'étude des arithmotriangles téléométriques à celle des arithmopoints de la quartique plane représentée par l'équation

$$(x^2 - y^2)(x^2 - 2y^2) = x^2 + 2y^2 .$$

L'étude arithmogéométrique de cette quartique plane échappe aux procédés qui ont été développés dans les pages précédentes. Mais il est toutefois possible à l'occasion du problème de la détermination de ceux de ces arithmotriangles téléométriques qui sont aussi héroniens, d'établir la proposition négative suivante.

Le triangle pédal de tout arithmotriangle héronien est lui-même un arithmotriangle héronien. De sorte que l'*arithmotriangle téléométrique héronien le plus général a pour sommets le centre du cercle inscrit I et deux des centres I<sub>1</sub> et I<sub>3</sub>*

des cercles exinscrits à l'arithmotriangle héronien  $A'B'C'$  le plus général dont deux côtés soient entre eux dans le rapport  $\frac{1}{2}$  :

$$A'B' = 2A'C' .$$

Reste à déterminer ceux-ci.

67. — Il s'agit donc de déterminer l'arithmotriangle héronien le plus général  $A'B'C'$  tel que  $A'B' = 2 A'C'$ . De tels triangles se rencontrent à propos de l'équilibre *sur un plan incliné* d'un cercle vertical, dont le centre de gravité est au milieu d'un rayon <sup>1</sup>.

En application de la règle du paragraphe 10, pour représenter un triangle héronien quelconque  $A'B'C'$ , je dois poser

$$\operatorname{tg} \frac{A'}{2} = \frac{1 - y^2}{y + z} , \quad \operatorname{tg} \frac{B'}{2} = y , \quad \operatorname{tg} \frac{C'}{2} = z ,$$

$y$  et  $z$  étant deux nombres rationnels assujettis à certaines inégalités. La condition

$$A'B' = 2A'C'$$

se traduit ici par

$$\sin C' = 2 \sin B' ,$$

c'est-à-dire encore par l'équation

$$\frac{z}{1 + z^2} = 2 \frac{y}{1 + y^2} .$$

Par conséquent *l'étude des arithmotriangles téléométriques héroniens* (ou encore celle des arithmotriangles héroniens dont deux côtés sont dans le rapport  $\frac{1}{2}$ ) est *équivalente à l'étude arithmogéométrique d'une cubique plane* douée de quatre arithmopoints (l'origine et les arithmopoints à l'infini) mais ne possédant pas d'autre arithmopoint.

Cette propriété négative résulte de ce que l'équation du

<sup>1</sup> C. f. H. BROCARD, *Journal de Spéciales*, 1885, pp. 108-109. L'équation d'équilibre  $\sin(\theta + \omega) = 2 \sin \omega$ , où  $\omega$  est l'angle que fait le plan incliné avec l'horizon, a été rencontrée par le même géomètre dans des recherches bien différentes concernant une question de géométrie du triangle et un certain groupe de trois paraboles. *Journal de Spéciales*, 1885, pp. 77-80, et *Mémoires de l'Académie des Sciences et Lettres de Montpellier*, Propriétés d'un groupe de trois paraboles, t. XL, 1885-1886, p. 51-58.

second degré en  $y$  ne peut admettre de racine rationnelle que si la quantité

$$\left(\frac{1+z^2}{z}\right)^2 - 1$$

est un carré parfait. On est ainsi conduit à une équation

$$z^4 + z^2 + 1 = t^2$$

qui admet la seule solution banale  $z = 0$  et dont l'impossibilité a été établie en 1777 par EULER<sup>1</sup>. *Il n'existe donc pas d'arithmotriangle téléométrique qui soit aussi un arithmotriangle héronien.*

68. — D'une manière générale, il convient d'observer que le problème qui consiste à déterminer l'arithmotriangle héronien le plus général dont le rapport de deux côtés est imposé *a priori* se traduit par l'équation d'une cubique plane

$$\frac{z}{1+z^2} = n \frac{y}{1+y^2}.$$

Considérée comme une équation du second degré en  $z$  elle entraîne la condition

$$z^4 + 2(1 - 2k^2)z^2 + 1 = t^2.$$

Le problème considéré est donc réductible à l'équation étudiée par EULER dans les mémoires cités plus haut.

On peut encore poser

$$\frac{z}{1+z^2} = n \frac{y}{1+y^2} = \frac{1}{2\lambda};$$

la question est alors réduite à l'étude d'une biquadratique gauche représentée par le système d'équations :

$$\lambda^2 - 1 = \mu^2, \quad \lambda^2 n^2 - 1 = \nu^2.$$

obtenues en écrivant que les deux équations quadratiques en  $z$  et en  $y$

$$\begin{aligned} z^2 - 2\lambda z + 1 &= 0, \\ y^2 - 2\lambda n y + 1 &= 0, \end{aligned}$$

ont des racines rationnelles.

<sup>1</sup> L. EULERI, *Commentationes arithmeticae*, édition de 1849, t. 2. *De casibus, quibus hanc formulam  $x^4 + kx^2y^2 + y^4$  ad quadratum reducere licet* [avril 1777 et mai 1782] (pp. 183-189 et pp. 492-500).

A. GENOCCHI, Sur l'impossibilité de quelques équations doubles, *C. R.*, 1874, t. 78, pp. 433-435.

69. — Ici s'arrête l'article que je m'étais initialement proposé d'écrire sur les notions d'arithmogéométrie, la suite devant être consacrée à des compléments et à des considérations d'un tout autre ordre. Le but poursuivi était d'insister sur l'intérêt considérable qu'offrent les remarques géométriques dans toutes ces questions d'arithmologie. L'absence de remarques de cette nature dans presque toutes les études faites sur des problèmes spéciaux de la théorie des nombres est une lacune que j'ai souvent jugée regrettable. C'est pourquoi je me suis décidé à entreprendre cet examen, certainement très incomplet encore, de toute une série de questions arithmétiques susceptibles d'être interprétées géométriquement d'une manière intéressante.

Je me suis principalement efforcé de rester dans le domaine le plus élémentaire. C'est ainsi que j'ai systématiquement écarté les fonctions elliptiques, qui ne figurent point dans nos programmes d'enseignement secondaire. Le lecteur désireux d'aller plus loin pourra d'ailleurs introduire la notion de fonctions elliptiques à l'occasion des propriétés arithmogéométriques des cubiques et des biquadratiques gauches, en suivant la voie tracée par J. BERTRAND<sup>1</sup>, par H. LÉAUTÉ<sup>2</sup>, par M. PICQUET<sup>3</sup> et par H. POINCARÉ<sup>4</sup>.

La plus grande partie du présent travail a été effectuée dans des conditions matérielles désastreuses, loin notamment de toute bibliothèque. Je n'aurais certainement pas eu la possibilité de le mener à bonne fin sans le concours précieux de MM. H. BROCARD et A. AUBRY, que j'ai souvent et toujours très utilement consultés.

Je me permets donc, dès maintenant, de leur adresser ici mes plus vifs remerciements.

(A suivre.)

---

<sup>1</sup> J. BERTRAND, *Traité de Calcul différentiel et intégral*, t. II, p. 583.

H. LÉAUTÉ, *Etude géométrique sur les fonctions elliptiques de première espèce*, *Journal de l'Ecole polytechnique*, 46<sup>e</sup> cahier, 1879 (t. XXVIII, p. 67-99).

<sup>3</sup> PICQUET, *Application de la représentation des courbes du 3<sup>e</sup> degré à l'aide des fonctions elliptiques*, *Journal de l'Ecole polytechnique*, 54<sup>e</sup> année, 1884.

H. POINCARÉ, *Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques*, *Journal de mathématiques pures et appliquées de Liouville*, 5<sup>e</sup> série, t. VII, 1901, pp. 161-233.