Généralisation des équations de Brahmagupta-Fermat.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1917)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Les paramètres δ et δ_1 sont liés entre eux par la relation

$$\pm\sqrt{\frac{\delta_1}{\delta}} = \frac{\delta^4 + 12\delta^3 - 18\delta^2 + 12\delta - 3}{(3\delta^2 - 1)^2}.$$

On observera enfin que la condition $z^2 - 1 > 0$, caractéristique des solutions du problème primitivement étudié par FERMAT se traduit ici par l'inéquation $\delta < \frac{1}{4}$.

La solution banale $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$ correspond précisément au cas limite $\delta = \frac{1}{4}$; elle appartient d'ailleurs indifféremment aux deux problèmes. La formule de récurrence ci-dessus écrite, entre δ_1 et δ, donne alors pour $\delta = \frac{1}{4}$ la valeur suivante de δ_1 :

$$\delta_1 = \frac{57 \cdot 121}{114 \cdot 244}$$

qui, supérieure à $\frac{1}{4}$, correspond au second problème ; elle conduit à la solution

$$x_1 = -\frac{119}{169}, \quad y_1 = \frac{120}{169}, \quad z_1 = \frac{1}{13},$$

déjà signalée à propos de la cubique perspective de la biquadratique gauche.

Généralisation des équations de Brahmagupta-Fermat.

50. — L'étude des équations $Ax^4 + Bx^3 = f(x, y)$ dans lesquelles $f(xy)$ est un polynôme quelconque du second degré des deux variables x et y se ramène immédiatement à l'étude arithmogéométrique d'une biquadratique gauche par l'introduction d'une nouvelle variable auxiliaire. Une telle équation

$$Ax^4 + Bx^3 = f(x, y)$$

peut, en effet, être considérée comme représentant dans le plan Oxy une courbe du quatrième degré, projection d'une biquadratique de l'espace. Cette courbe gauche est l'intersection d'un cylindre parabolique

$$x^2 = z$$

avec une quadrique d'équation :

$$Az^2 + Bxz = f(x, y) .$$

51. — Equations de Brahmagupta-Fermat généralisées. — Une première extension toute naturelle des équations de Brahmagupta-Fermat

$$Ax^2 + Bx + C = y^2$$

est l'équation

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = y^2 ;$$

son étude se rattache immédiatement à celle d'une cubique plane. (Voir § 42).

Il en est de même des équations plus générales :

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = y^2 .$$

Pour traiter arithmogéométriquement une équation de cette espèce, il suffit de poser $x^2 = z$ de sorte qu'elle représente une quartique plane projection sur le plan $0xy$ de la biquadratique gauche d'équations :

$$\begin{cases} Az^2 + Bxz + Cz + Dx + E = y^2 , \\ x^2 = z . \end{cases}$$

Les cas où A ou E seront carrés parfaits permettront de trouver immédiatement une série de solutions.

Parmi les équations de Brahmagupta-Fermat généralisées au sens qui précède, il convient de mentionner d'une manière toute spéciale celles qui admettent pour premier membre un trinome bicarré en x et plus particulièrement encore les équations

$$x^4 + Ax^2 + B^2 = \square .$$

En posant

$$x + \frac{B}{x} = X ,$$

cette équation devient

$$X^2 + A - 2B = \square ;$$

de sorte que *toute équation du type*

$$x^4 + Ax^2 + B^2 = \square ,$$

est équivalente au système

$$X^2 + a = \square \qquad X^2 + b = \square$$

des équations des nombres congruents. Les constantes A, B, a, b qui figurent dans ces diverses équations sont liées entre elles par les conditions

$$a = A - 2B , \qquad b = -4B .$$

L. Euler affirma l'impossibilité pour $k = 1, 3, 5, 6, -14$, etc., ... de

$$x^4 + kx^2 + 1 = \square .$$

L'équivalence précédente fut indiquée par A. Genocchi dans le mémoire cité au § 44.

L'équation

$$x^4 - 4x^2 + 1 = \square$$

fut enfin traitée par Ed. Lucas [*Recherches sur l'analyse indéterminée,* Moulins, 1873, p. 67 ; *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise,* p. 120].

52. — Problème des arithmodistances pour une hyperbole équilatère ou une lemniscate de Bernoulli. — Il arrive très fréquemment que ce genre d'équations de Brahmagupta-Fermat intervienne dans les problèmes des arithmodistances pour certaines courbes. C'est ainsi que le problème des arithmodistances pour l'hyperbole équilatère et son centre de symétrie ou encore pour la lemniscate de Bernoulli et son point double (transformée de l'hyperbole équilatère par inversion) se traduit analytiquement par l'équation

$$y^2 = 1 + x^4 .$$

Celle-ci est impossible et n'admet que la solution banale $x = 0$. Cette impossibilité résulte du théorème négatif de

FERMAT sur l'équation $x^4 + y^4 = z^2$ ou encore du théorème dû à FRÉNICLE de non-existence d'arithmotriangle pythagorique dont l'aire soit double d'un carré. (Voir à ce sujet § 6 de ma note sur *Le problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise*).

Cette impossibilité est encore équivalente à celle de $\operatorname{tang} \theta = y^2$, $\operatorname{tang} \frac{\theta}{2}$ étant rationnel. En d'autres termes il n'existe pas d'arithmotriangle pythagorique dont le rapport des cathètes soit un carré parfait.

53. — PROBLÈME DES ARITHMODISTANCES POUR UNE ARITHMOCONIQUE — Plus généralement, étant donnée une conique douée d'arithmopoints et, par suite, représentable par des équations

$$x = \frac{f_2}{h_2}, \qquad y = \frac{g_2}{h_2},$$

dans lesquelles f_2, g_2 et h_2 sont des polynômes du second degré d'une même variable t, le problème des arithmodistances pour cette arithmoconique et pour un arithmopoint du plan, — qui peut sans restriction de généralité être pris pour origine des coordonnées, — se traduit par l'équation

$$\frac{f_2^2 + g_2^2}{h_2^2} = \text{carré parfait} \;;$$

ou encore $f_2^2 + g_2^2 = \mathrm{Y}^2$. De sorte qu'en explicitant la variable t on est ramené à une équation de la forme

$$\mathrm{A}x^4 + \mathrm{B}x^3 + \mathrm{C}x^2 + \mathrm{D}x + \mathrm{E} = y^2 .$$

Ce résultat s'étend d'ailleurs au cas d'une arithmoconique de l'espace. On a alors

$$x = \frac{f_2}{h_2}, \qquad y = \frac{g_2}{h_2}, \qquad z = \frac{k_2}{h_2} \;;$$

on est par suite amené à une équation

$$f_2^2 + g_2^2 + k_2^2 = \mathrm{Y}^2 ,$$

qui, après développement, donne encore une équation de Brahmagupta-Fermat du quatrième ordre.

La réciproque n'est pas exacte. Toute équation

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = y^2$$

ne serait susceptible d'être rattachée à un problème d'arithmodistance pour une arithmoconique de l'espace, ni *a fortiori* pour une arithmoconique de l'espace. Les équations pour lesquelles A et E ne sont pas sommes de deux ou trois carrés ne sont pas susceptibles d'une telle interprétation géométrique : par exemple aucune des équations

$$y^2 = x^4 - 1 , \qquad y^2 = x^4 + 7 ,$$

ne peut être associée à une arithmoconique de l'espace ou du plan au titre de courbe représentative de l'équation du problème des arithmodistances.

Le problème de Bhaskara et les équations

$$\varphi(x, y) = u^2 , \qquad \psi(x, y) = v^2 .$$

54. — Le problème de Bhaskara. — Le système des deux équations indéterminées

$$x^2 + y^2 - 1 = u^2 ,$$
$$x^2 - y^2 - 1 = v^2 ,$$

à quatre inconnues x, y, u, v, dont Bhaskara[1] a donné les trois solutions particulières suivantes dépendant d'un paramètre rationnel arbitraire

$$\left\{ \begin{array}{ll} x = 8\lambda^2 + 1 , & y = 8\lambda^2 , \\ x = \lambda + \dfrac{1}{2\lambda} , & y = 1 , \\ x = \dfrac{(8\lambda^2 - 1)^2}{8\lambda^2} , & y = \dfrac{8\lambda^2 - 1}{2\lambda} , \end{array} \right.$$

[1] *Le Lilavati*, section IV, règle 59-60. Cf. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, question 206, [2], t. VIII, 1849, p. 107; E. Clère en donna une solution incomplète, t. IX, 1850, pp. 116-118.