Remarques sur le problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise (Fibonacci),

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1917)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Tout ce problème est ainsi ramené à la sommation de progressions géométriques.

On trouve facilement $\sum_{\lambda}^{0...n} \lambda \, . \, 2^{\lambda} = 2 + (n - 1) \, . \, 2^{n+1}$.

On en déduit immédiatement $\sum_{\lambda}^{0...n} (\lambda + 1) \, . \, 2^{\lambda} = 1 + n \, . \, 2^{n+1}$,

et ce résultat, combiné avec la décomposition (a) du nombre n des disques, conduit à la formule cherchée

$$T_n = 1 + (\lambda + r) \, . \, 2^{\lambda+1}$$

L.-G. Du Pasquier (Neuchâtel).

Remarques sur le problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise (Fibonacci),

à propos d'un article de M. E. Turrière.

Il est intéressant de rapprocher les recherches publiées récemment par MM. Hæntzschel[1] et Turrière[2] sur le problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise. Tandis que M. Turrière ne fait usage que de moyens élémentaires, M. Hæntzschel montre comment l'emploi des fonctions $\wp$ de Weierstrass facilite l'étude approfondie de ces problèmes arithmo-géométriques.

D'après le 7e exemple du 3e livre de l'Arithmétique de Diophante, il s'agit de trouver trois nombres en progression arithmétique $(a - d, \; a, \; a + d)$ et tels que la somme de deux des nombres soit chaque fois un carré parfait.

Diophante cherche d'abord trois nombres carrés qui sont en progression arithmétique

$$2a - d = r^2 \; , \qquad 2a = t^2 \; , \qquad 2a + d = w^2 \; ;$$

il trouve

$$41^2 - 720 = 31^2 \; , \qquad 41^2 \; , \qquad 41^2 + 720 = 49^2 \; .$$

---

[1] *Jahresbericht der D. M.-V.*, 24e année, 1915, p. 467-471, Lösung einer Aufgabe aus der Arithmetik des Diophante; 25e année, 1916, p. 139-145, Ueber eine Aufgabe aus der Arithmetik des Diophante.

[2] *L'Enseign. mathém.*, 17e année, 1915, p. 315-324, Le problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise.

Mais c'est la première question de Jean de Palerme à Léonard de Pise (Fibonacci) qui a donné la solution

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \left(\frac{31}{12}\right)^2, \quad \left(\frac{41}{12}\right)^2, \quad \left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2.$$

Il est clair que

$$\left(\frac{w+r}{2}\right)^2 + \left(\frac{w-r}{2}\right)^2 = t^2 ,$$

d'où il suit que $\frac{w-r}{2}$, $\frac{w+r}{2}$ et t sont des nombres rationnels de Pythagore.

M. Hæntzschel a démontré [*l. c.*, 24[e] année, p. 468, (5) et p. 469, (7)-(11)] que l'expression générale de la série est :

$$2a - d = \wp(u) - e_3 = \frac{n^2}{4k^2}(2k^2 - 4k + 1)^2 = r^2 ;$$

$$2a = \wp(u) = \frac{n^2}{4k^2}(2k^2 - 2k + 1)^2 = t^2 ;$$

$$2a + d = \wp(u) - e_1 = \frac{n^2}{4k^2}(2k^2 - 1)^2 = w^2 ;$$

$$d = e_3 = - e_1 = \frac{n^2}{k}(2k^2 - 3k + 1) ,$$

où $\wp(u)$ est la fonction elliptique de Weierstrass. C'est la solution primitive selon Fermat. Voici la solution complète du problème de Jean de Palerme (*Jahresbericht*, 25[e] année, p. 142), où δ est une valeur spéciale de la différence d.

$$\begin{array}{lll}
\wp(u) - \delta , & \wp(u) , & \wp(u) + \delta ; \\
\wp(2u) - \delta , & \wp(2u) , & \wp(2u) + \delta ; \\
\wp(3u) - \delta , & \wp(3u) , & \wp(3u) + \delta ; \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\wp(nu) - \delta , & \wp(nu) , & \wp(nu) + \delta .
\end{array}$$

$$\wp(2u) = \frac{n^2[(2k^2 - 2k + 1)^4 + 16k^2(2k^2 - 3k + 1)^2]^2}{16k^2(2k^2 - 1)^2(2k^2 - 2k + 1)^2(2k^2 - 4k + 1)^2} ;$$

$$\wp'(nu)^2 = 4\wp(nu)[\wp^2(nu) - d^2] ;$$

$$\wp(3u) = \wp(u) + \frac{\wp'(u) . \wp'(2u)}{(\wp(2u) - \wp(u))^2} \qquad (l. c., \text{p. } 470, 471, 143).$$

Exemples. A. $k=5$; $n=\frac{5}{6}$; d'où suit $2a=\left(\frac{41}{12}\right)^2$; $d=\delta=5$. (Léonard de Pise.)

$$a)\qquad \left(\frac{41}{12}\right)^2-5=\left(\frac{31}{12}\right)^2; \qquad \left(\frac{41}{12}\right)^2; \qquad \left(\frac{41}{12}\right)^2+5=\left(\frac{49}{12}\right)^2.$$

$$b)\qquad \frac{3\,344\,161^2}{24^2.\,31^2.\,41^2.\,49^2}-5=\frac{113\,279^2}{24^2.\,31^2.\,41^2.\,49^2}; \qquad \left(\frac{3\,344\,161}{24.\,31.\,41.\,49}\right)^2;$$

$$\left(\frac{3\,344\,161}{24.\,31.\,41.\,49}\right)^2+5=\left(\frac{4\,728\,001}{24.\,31.\,41.\,49}\right)^2. \qquad \text{etc.}$$

B. $k=-1$, $n=-2$; d'où il suit $2a=25$; $d=\delta=-24$ (*Jahresbericht*, 25e année, 1916, p. 142-145).

$$a)\qquad 5^2-24=1^2; \qquad 5^2; \qquad 5^2+24=7^2.$$

$$b)\qquad \left(\frac{1201}{70}\right)^2-24=\left(\frac{1151}{70}\right)^2; \qquad \left(\frac{1201}{70}\right)^2; \qquad \left(\frac{1201}{70}\right)^2+24=\left(\frac{1249}{70}\right)^2.$$

$$c)\qquad \left(\frac{7\,776\,485}{1\,319\,901}\right)^2-24=\left(\frac{4\,319\,999}{1\,551.851}\right)^2; \qquad \left(\frac{7\,776\,485}{1\,319\,901}\right)^2;$$

$$\left(\frac{7\,776\,485}{1\,319\,901}\right)^2+24=\left(\frac{10\,113\,607}{1\,551.851}\right)^2. \qquad \text{etc.}$$

Dans le travail de M. Turrière on aurait

$x^1=\wp(3u)$, voir p. 316, (3) et $x_2^1=\wp(2u)$, voir p. 320, (10).

(D'après une lettre de M. Hæntzschel. *La Réd.*)