

# HENRI POINCARÉ Œuvres publiées par M. G. Darboux Tome second

Autor(en): **Buhl, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1917)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-17313>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

HENRI POINCARÉ  
ŒUVRES PUBLIÉES PAR M. G. DARBOUX  
TOME SECOND <sup>1</sup>

PAR

A. BUHL (Toulouse).

---

*L'Enseignement mathématique* se fait un devoir de signaler cette publication impatientement attendue et qui, commençant par le Tome second, nous livre l'œuvre magistrale de la jeunesse de Poincaré, celle qui a trait aux fonctions fuchsiennes.

Je me fais un plaisir d'écrire ici, non un article bibliographique, car toute publicité de caractère bibliographique serait ridiculement superflue, mais une sorte d'avertissement que je dédie à des camarades, à des élèves même, qui m'ont souvent demandé « s'ils pourraient lire Poincaré ». Personnellement, je fus parfois fort embarrassé à cause de la dispersion des Mémoires. De plus, les études faites jadis, à la Sorbonne, ne nous donnaient pas assez l'impression de pouvoir approcher les travaux du Maître.

Nous entendions parler de choses admirables et nous aurions voulu les admirer alors que nous possédions à peine le programme de la Licence. L'enfance a toutes les audaces ! D'autres maîtres également vénérés, MM. Gaston Darboux, Paul Appell, Emile Picard, semblaient plus près de nous, alors que Poincaré s'en éloignait encore en ne professant guère, à l'époque dont je parle, que dans la chaire de mécanique

---

<sup>1</sup> Un magnifique volume in-4° de LXXVII-628 pages, 19 figures et un portrait. Paris, Gauthier-Villars, 1916. Prix : 35 fr.

céleste. Je n'ai point dédaigné cette dernière science mais, en général, elle avait peu d'adeptes. Quelques-uns de ceux qui entendirent les grands cours de M. Picard, sur les fonctions abéliennes, fuchsiennes, hyperabéliennes, hyperfuchsiennes, furent peut-être trop rapidement dispersés par les nécessités de la vie et quand, profitant de quelque halte salutaire, ils voulaient regarder encore les sommets de la science, ils constataient avec chagrin que leur isolement ne leur en laissait plus les moyens matériels; ils manquaient de l'appui d'un livre, d'un texte imprimé trouvable et maniable partout.

Ceux-là rendront grâce à M. Darboux, ainsi qu'à ses collaborateurs, M. N.-E. Nörlund, M. E. Lebon, pour la publication de ces *Œuvres* où tant de merveilles vont être habilement réunies. J'imagine aussi que bien des jeunes géomètres à l'esprit créateur verront maintenant une vaste mine, d'exploitation commode, là où des gisements d'une égale richesse totale, avaient cependant le grave défaut d'être séparés et de ne pouvoir être véritablement réunis que par qui avait déjà quelque connaissance de leur structure.

Cet ensemble de travaux sur les fonctions automorphes renferme, à coup sûr, des passages de difficultés très inégales. Tout le monde ne poussera pas la lecture au même degré d'avancement, mais je n'hésite pas à affirmer que tout esprit mathématique de puissance moyenne peut saisir les premières lignes du chef-d'œuvre et voir l'art simple et fécond qui engendre tous les détails, cet esprit ne poursuivrait-il point ceux-ci en toute leur complexité.

\* \* \*

Avant de passer à des descriptions mathématiques, il serait injuste de ne point mentionner un *Eloge historique d'Henri Poincaré* qui s'ajoute, comme un nouveau joyau, aux *Eloges académiques et Discours* de M. G. Darboux. Cet Éloge historique, lu en Séance publique annuelle du 15 décembre 1913, et déjà imprimé dans les publications de l'Institut, constitue une magnifique préface au volume d'aujourd'hui. Les articles

suscités par la mort de Poincaré ont été fort nombreux; plusieurs sont dus à ses confrères de l'Académie des Sciences.

Celui de M. Darboux a, au plus haut degré, le charme de l'intimité; il nous laisse pénétrer dans la vie enfantine de qui devait devenir un prodigieux géomètre; il abonde en anecdotes délicates et imprévues. Il nous montre non seulement le savant, mais l'enfant au foyer paternel, l'homme au foyer familial, puis le citoyen et enfin le grand patriote qui, dans les heures tragiques que nous vivons, élève toujours, malgré la tombe, l'éclatant flambeau de la Science française.

\*  
\* \* \*

Je ne conseille point l'abord des fonctions fuchsiennes à qui ne connaîtrait point les fondements de la théorie des fonctions elliptiques. Au point de vue logique ce n'est cependant pas essentiel; les secondes fonctions sont des cas particuliers des premières et l'étude d'un cas général peut permettre de descendre ensuite au cas particulier. Mais, à ce compte-là, on pourrait ignorer aussi la trigonométrie élémentaire dont toutes les formules sont des dégénérescences de formules elliptiques. Le défi ainsi porté au sens commun serait peut-être trop violent. D'ailleurs, Henri Poincaré, lui-même, nous a rappelé qu'en matière d'acquisition de connaissances nouvelles, il nous fallait généralement repasser par où ont passé nos pères « rapidement, mais sans brûler d'étapes » (*Science et Méthode*, p. 135).

Mais il faut reconnaître que l'ensemble des traités relatifs aux fonctions elliptiques — pour ne parler que des traités — forme un monument où le fil d'Ariane risque souvent d'échapper des mains du néophyte. Je prends sur moi de n'en indiquer qu'un, celui de P. Appell et E. Lacour (Gauthier-Villars, 1897) qui me semble merveilleusement adapté au but. En étudiant une vingtaine de pages de cet Ouvrage, en trois ou quatre endroits différents, on sera suffisamment armé pour aborder la lecture du Tome II des Œuvres de Poincaré.

La première chose à faire est de se familiariser avec la double périodicité traduite par l'existence du champ complexe divisé en parallélogrammes. C'est immédiat.

On observera ensuite que les fonctions doublement périodiques ne naissent pas dans ce champ de manière absolument directe. La plus simple de toutes, la fonction  $\wp u$  de Weierstrass, est la dérivée du quotient de  $\sigma' u$  par  $\sigma u$ . La fonction  $\sigma u$  elle-même n'est pas doublement périodique ; quand on ajoute des périodes à son argument  $u$ , elle se reproduit *multipliée par un facteur exponentiel*.

Voyons maintenant les constructions de Jacobi (Appell et Lacour, chap. IV). Elles aussi reposent essentiellement sur la construction préliminaire de fonctions  $\Theta$  et  $H$  remarquables surtout par de beaux et faciles développements en séries ; mais ce ne sont que certains quotients, formés avec ces fonctions, qui donnent  $sn$ ,  $cn$ ,  $dn$ , fonctions jouissant alors d'une double périodicité proprement dite.

Venons à l'œuvre de Poincaré.

Une œuvre géniale n'est pas quelque nouvel enchevêtrement, tellement complexe que personne, jusque-là, n'avait pu réussir à bâtir quelque chose d'aussi compliqué.

C'est, au contraire, la claire perception d'une harmonie très simple que les yeux grossiers des contemporains ne voient point ; c'est l'esquisse rapide de l'artiste, imprévue mais cependant lumineuse et frappante dès qu'elle existe. Ceci est vrai dans tous les domaines de la pensée et plus particulièrement encore dans le domaine mathématique.

Combien simple est l'égalité (où l'on peut toujours avoir  $ad - bc = 1$ )

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} . \quad (1)$$

Cependant l'esprit reste confondu quand on songe à l'impénétrable champ de merveilles qu'elle engendre. Elle transforme la variable complexe  $z$  en  $z'$  et  $z'$ , à son tour, peut donner une transformée

$$z'' = \frac{a'z' + b'}{c'z' + d'} = \frac{(aa' + cb')z + ba' + db'}{(ac' + cd')z + bc' + dd'} \quad (2)$$

qui ne diffère de  $z'$  que par un changement de coefficients. L'ensemble des transformations (1), à coefficients divers, forme un *groupe*. Mais que de variété dans celui-ci.

Ainsi, considérons toutes les rotations qui permettent de faire coïncider un polyèdre régulier avec lui-même, par de simples échanges de sommets. Une projection stéréographique de ces sommets fera correspondre aux rotations sphériques des transformations planes du type (1). Il y a déjà là quelque chose d'énorme; dans les groupes *linéaires* du type (1) nous venons d'apercevoir les *groupes polyédriques*. A ceux-ci correspondent des formes algébriques invariantes par les transformations des dits groupes; ce sont les *fonctions polyédriques* qu'il faut sans doute mentionner d'abord au point de vue logique. Elles ont été considérées avant Poincaré et jouent notamment un rôle considérable dans les travaux de Klein. C'est, si l'on veut, une généralisation dans l'espace, de la théorie des polygones réguliers et de l'équation binôme. Je dirais même que de tels points relèvent plutôt de l'algèbre que de l'analyse infinitésimale, en me hâtant toutefois d'ajouter que je ne crois point aux cloisons étanches, justement dans un domaine où l'arithmétique, l'algèbre et l'analyse ont des rencontres admirables.

Un autre groupe formé de substitutions (1) est le groupe *modulaire*; il correspond au cas où  $a, b, c, d$  sont entiers. Les fonctions invariantes par ce groupe sont dites *fonctions modulaires*, car elles naissent de la relation qui existe entre le rapport des périodes d'une fonction elliptique et son *module*, constante arbitraire figurant naturellement dans la fonction, de même que l'excentricité de l'ellipse figure naturellement dans l'arc, de même qu'un angle d'écart initial est élément arbitraire dans un mouvement pendulaire.

Sans autre préparation que celle indiquée, on pourra facilement lire, à ce sujet, le chapitre XIII du *Traité* de MM. Appell et Lacour.

Il y a déjà, en ceci, quelque chose d'extrêmement frappant. On veut construire des fonctions doublement périodiques; dès qu'on y a réussi, elles en livrent d'autres qui manifestent des propriétés particulières mais indéniables *d'automor-*

*phisme*, c'est-à-dire des propriétés d'invariance quant aux transformations d'un certain groupe linéaire formé de substitutions du type (1).

Henri Poincaré s'est peu servi de ces préliminaires. Il laisse les groupes et les fonctions polyédriques se développer en Allemagne et il ne jette guère que des coups d'œil rétrospectifs sur les fonctions modulaires. Notons cependant que la réalité des coefficients du groupe modulaire entraîne qu'à un  $z$  réel correspond un  $z'$  réel. En d'autres termes, l'axe réel est invariant par toutes les transformations du groupe. Les groupes *fuchsians* ont, en général, un cercle, *dit cercle fondamental*, pour ligne invariante analogue.

C'est ici qu'il convient de quitter les études préliminaires, plus ou moins d'accord avec ce que je viens d'indiquer, pour étudier directement le texte du Maître disparu. Dans le Tome II qui vient d'être publié, je n'hésite pas à distinguer, comme absolument fondamentaux, les deux Mémoires intitulés: *Théorie des groupes fuchsians* (pp. 108-168) et *Sur les fonctions fuchsiennes* (pp. 169-257). Avant la page 108 du Volume, on trouve dix-huit Notes ou petits Mémoires en lesquels Poincaré fait des esquisses sommaires des résultats obtenus mais en ne démontrant que peu de choses. Je crois qu'il vaut mieux lire d'abord les Mémoires développés; on reviendra ensuite sur les dix-huit Notes en question, qui pourront alors aider à fixer dans l'esprit les points les plus saillants des théories complètes.

Dans la *Théorie des groupes fuchsians*, nous voyons d'abord que ces groupes sont formés de substitutions du type (1), les coefficients  $a, b, c, d$  étant réels (mais non entiers, car alors le groupe fuchsien dégénérerait en groupe modulaire). Le cercle fondamental, dans ces conditions est encore l'axe réel, mais on peut montrer tout de suite que ce peut être un cercle quelconque, ce qui est établi dans un paragraphe spécial terminant le travail (p. 164).

Soit la substitution à coefficients réels

$$\left( z, \frac{az + b}{cz + d} \right). \quad (3)$$

Faisons-lui correspondre la substitution

$$\left( \begin{array}{c} \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \frac{a \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} + b}{c \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} + d} \end{array} \right) \quad (4)$$

où  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sont des constantes complexes *fixes*. Si  $a, b, c, d$  varient, avec la seule condition  $ad - bc = 1$ , il est clair que les substitutions (4) forment un groupe. Pour (3) la ligne invariante est l'axe réel, dont l'équation est

$$\text{partie imaginaire de } z = 0 .$$

Pour (4) la ligne invariante est, de même, le *cercle*

$$\text{partie imaginaire de } \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = 0 .$$

C'est, comme je l'ai déjà dit, le *cercle fondamental*.

Evidemment, le raisonnement ne serait pas valable si  $a, b, c, d$  devenaient imaginaires aussi; ce serait le cas des groupes *kleiniens*, qui n'ont point de cercle invariant.

Revenons aux substitutions réelles. Henri Poincaré dit qu'elles transforment une figure quelconque du champ complexe en une figure *congruente* (p. 112). Ces figures congruentes sont analogues aux figures égales de la géométrie élémentaire, où elles sont déduites les unes des autres par des *déplacements* qui, eux aussi, forment un groupe. La géométrie des figures congruentes est analogue à celle de Lobatschewsky, à celle d'Euclide sans le fameux postulat. C'est le cas de reparler de ces êtres non-euclidiens que Poincaré ne dessina que plus tard, qui vivraient dans un monde où les déplacements seraient des substitutions linéaires plus générales; leur géométrie serait non-euclidienne, leur trigonométrie pourrait faire usage des fonctions fuchsienues, ce qui n'est peut-être pas très aisé à se représenter au point de vue des calculs pratiques, mais, ayant évolué dans un univers plus complexe, ils pourraient, par adaptation, être plus intelligents que nous. Depuis la mort de Poincaré, ces êtres s'endorment. Je demande qu'on les fasse revivre,



qu'on les réveille ! Sont-ils si fictifs ? Ils le sont à coup sûr beaucoup moins que les pygmées, les géants, les Lilliputiens des voyages de Gulliver, toutes fictions qu'il serait grand dommage de rayer de la littérature.

Dans les êtres fictifs de Poincaré, je vois une des plus belles conquêtes de l'esprit. L'humanité ne peut se passer de mythes et certains ont dit que la science balayait impitoyablement ceux-ci. Quelle erreur ! Elle en crée de bien plus beaux que ceux d'une imagination arbitraire !

Revenons à la forme mathématique des congruences entre figures. L'idée du déplacement sans déformation nous paraît, bien à tort, présenter des privilèges spéciaux quant à la conservation des longueurs et des aires. Pour les substitutions du type (2), l'intégrale

$$\int \frac{\text{mod } dz}{y},$$

étendue à un arc de courbe, reste invariante quand cet arc est transformé en un arc congruent. Il en est de même pour l'intégrale double

$$\iint \frac{dx dy}{y^2}$$

étendue à une aire et à l'aire congruente. En quoi ces intégrales sont-elles *logiquement* différentes de celles qui ne contiennent point les dénominateurs  $y$  et  $y^2$  et que nous appelons *longueur* et *aire* ?

Les groupes fuchsien sont *discontinus*. Ils possèdent une *région fondamentale*  $R_0$  limitée par des arcs de cercle qui, prolongés quand il y a lieu, sont normaux au cercle fondamental. Les transformations du groupe changent  $R_0$  en des régions congruentes et l'ensemble de ces régions forme un domaine que l'on étend de proche en proche de même que, dans la théorie des fonctions elliptiques, on passe d'un parallélogramme des périodes à des parallélogrammes voisins aussi nombreux qu'il est nécessaire ; l'un de ces parallélogrammes est une région fondamentale  $R_0$ . Dans les deux cas, un point de  $R_0$  ne reste jamais dans  $R_0$  par une substitu-

tion du groupe ; c'est en ceci que consiste la discontinuité. Dans les deux cas également, il y a une infinité de régions congruentes à  $R_0$ , ce qui revient à dire qu'il y a une infinité de substitutions dans le groupe. Henri Poincaré nous rappelle ici (p. 117) qu'il y a cependant des transformations du type (1) qui ne comprennent qu'un nombre fini de substitutions, allusion manifeste aux groupes polyédriques.

Mais, comme je l'ai dit, c'est là un intermédiaire sur lequel il ne s'appuiera pas. Quant à examiner comment la région  $R_0$  doit être choisie, c'est une chose que je ne pourrais indiquer qu'en recopiant la plus grande partie du texte du Maître. Il y a là une étude d'attention absolument inévitable et que l'avenir ne simplifiera peut-être pas beaucoup car, si elle n'est pas difficile, elle est, du moins, assez étendue à cause des nombreux cas particuliers qu'elle comprend. La  $R_0$  d'un groupe fuchsien est un être essentiellement plus subtil que le parallélogramme des fonctions doublement périodiques. C'est le dressoir d'orfèvrerie, aux sculptures fines et délicates, à côté de la rustique table carrée.

Voici cependant une propriété merveilleuse de cette  $R_0$ , propriété facile à décrire.

On sait qu'une fonction algébrique quelconque est uniforme sur une surface (dite *surface de Riemann*) formée de plans superposés et de lignes de passage permettant de passer d'un feuillet à un autre. Une telle surface présente une *connexion* spéciale ; elle est comparable à un tore, à une sphère transpercée de part en part par des puits, toutes surfaces qui ne se morcellent pas forcément quand on y fait, avec des ciseaux, une coupure qui est cependant une courbe fermée. Ainsi on ne morcelle pas un tore en le coupant le long d'un seul méridien. Le *genre* d'une surface de Riemann est un nombre qui caractérise la surface au point de vue du nombre des coupures nécessaires pour la rendre simplement connexe, c'est-à-dire morcelable par toute nouvelle coupure.

Or il se trouve que la  $R_0$  d'un groupe fuchsien est limitée par des côtés se correspondant deux à deux et qu'on peut rouler, déformer cette région jusqu'à souder les côtés correspondants et obtenir ainsi une surface identique à une

surface de Riemann. D'où la notion de *genre* pour un groupe fuchsien. Rien que cette notion suffit à montrer quelles différences profondes peuvent exister entre ces groupes et, dans ce premier grand Mémoire, Henri Poincaré ne cherche guère à montrer autre chose, mais il y a là le germe de l'idée de l'uniformisation des fonctions algébriques quelconques au moyen des fonctions invariantes par le groupe fuchsien, ce dernier, avec sa  $R_0$ , jouant un rôle qui correspond complètement au rôle primitivement joué par la surface riemannienne.

J'ai hâte de parler du Mémoire suivant, mais il me semble toujours qu'on ne saurait trop s'arrêter sur la *Théorie des groupes fuchsien*s ; elle est le terrain fondamental qu'il faut analyser scrupuleusement avant d'en vouloir tirer une moisson ; qui le connaîtra bien moissonnera aisément.

La première révélation du Mémoire *Sur les fonctions fuchsien*nes est l'extrême facilité avec laquelle ces fonctions se construisent au point de vue formel.

Soit  $H$  une fonction rationnelle et considérons la série

$$\Theta(z) = \sum (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m} H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

où, à toutes les valeurs de l'indice  $i$ , correspondent toutes les substitutions d'un groupe fuchsien.

Remplaçons, dans cette égalité,  $z$  par

$$z_j = \frac{\alpha_j z + \beta_j}{\gamma_j z + \delta_j}.$$

Alors  $\Theta(z_j)$  se compose d'abord du facteur  $(\gamma_j z + \delta_j)^{2m}$  que l'on peut écrire en avant du sigma puisqu'il ne dépend pas de  $i$ . Quant aux facteurs qui restent sous le sigma, on voit sans peine, par le calcul immédiat qui donne (2) en partant de deux substitutions (1), qu'ils sont les mêmes que ceux qui figurent dans  $\Theta(z)$ ; ils ont simplement changé de place. Donc

$$\Theta(z_j) = (\gamma_j z + \delta_j)^{2m} \Theta(z).$$

Soit  $\Theta_1$  une autre fonction formée comme  $\Theta$ , c'est-à-dire telle que

$$\Theta_1(z_j) = (\gamma_j z + \delta_j)^{2m} \Theta_1(z) .$$

Si nous divisons nos deux dernières égalités membre à membre, nous aurons une fonction  $F(z)$  telle que

$$F(z_j) = F(z) .$$

C'est la fonction *fuchsienne*. Elle est le quotient de fonctions  $\Theta$  dites *thêtafuchsiennes*, de même que les fonctions elliptiques de Jacobi sont des quotients de fonction  $\Theta$  à multiplicateurs destinés aussi à disparaître par division.

Il est extraordinaire, je dirais presque incompréhensible, que des légendes redoutables se soient créées autour de choses aussi simples. Des gens à érudition mathématique notable, des agrégés par exemple, m'ont parlé des fonctions fuchsiennes en termes véritablement superstitieux : « Nous avons essayé, mais nous n'y pouvons rien comprendre ! » Ce serait un problème psychologique intéressant que de chercher à déterminer la cause de telles opinions. Je le laisse de côté. Je puis pronostiquer maintenant que, si les sujets que je viens d'indiquer sont bien compris, tout le reste du Volume pourra être travaillé. Par « bien compris » j'entends surtout la compréhension *formelle* des choses. Je ne vois aucun inconvénient à ce que, dans une première lecture, on laisse de côté des démonstrations telles que celle concernant la convergence des séries thêtafuchsiennes.

Je vais, quant à la suite, être bref. Feuilletant rapidement ces admirables pages, j'indiquerai simplement, d'une touche ultra-légère, les merveilles qu'on y rencontre.

Les fonctions thêtafuchsiennes ont des zéros et des infinis qui s'étudient élégamment par l'application des théorèmes généraux de Cauchy. Le plus grand intérêt est du côté de leurs points singuliers essentiels qui se rangent sur le cercle fondamental. Tantôt on peut passer entre eux pour prolonger analytiquement la fonction, tantôt ils se pressent sur ce cercle jusqu'à en faire une ligne singulière infranchissable par les procédés tayloriens. Des travaux ultérieurs ont montré que,

pour les fonctions analytiques les plus générales, de tels cas étaient plutôt normaux que singuliers; les fonctions thêta-fuchsienues les ont éclairés d'une vive lumière.

*Toutes les fonctions fuchsienues de même groupe sont fonctions rationnelles de deux d'entre elles,  $x$  et  $y$ .*

Soient  $v_1$  et  $v_2$  des fonctions de  $x$ , telles que

$$\frac{v_2}{v_1} = z, \quad v_1 \frac{dv_2}{dx} - v_2 \frac{dv_1}{dx} = v_1^2 \frac{dz}{dx} = 1.$$

Alors

$$\frac{1}{v_1} \frac{d^2 v_1}{dx^2} = \frac{1}{v_2} \frac{d^2 v_2}{dx^2} = \varphi(x, y),$$

car on voit facilement que les deux premiers membres de cette double égalité jouissent de l'automorphisme fuchsien.

*Ainsi*

$$v_1 = \sqrt{\frac{dx}{dz}} \quad \text{et} \quad v_2 = z \sqrt{\frac{dx}{dz}}$$

*sont les deux intégrales de l'équation*

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = v \varphi(x, y)$$

*où  $\varphi$  est fonction rationnelle du point analytique  $(x, y)$ .*

C'est là une conséquence capitale, claire, lumineuse du premier théorème souligné.

La classification des fonctions fuchsienues repose surtout sur celle des groupes fuchsienus correspondants. C'est une des raisons pour lesquelles, plus haut, je préconisais surtout l'étude des groupes. Les rapports avec la théorie des équations différentielles linéaires, à coefficients algébriques, percent avec les premières constructions fonctionnelles; nous allons y revenir avec les écrits plus particulièrement consacrés à ces équations.

Dans l'intervalle mentionnons le Mémoire *Sur les groupes kleinéens* (pp. 258-299).

D'un mot j'ai déjà situé ces groupes par rapport aux groupes fuchsienus; il faut cependant ajouter que de notables différences de méthodes apparaissent ici. Les transformations qui transportent sur la sphère les réseaux polygonaux

plans entraînent des considérations spatiales ; des sphères divisent l'espace en le rapportant tout entier à une certaine région fondamentale. Ces résultats furent d'ailleurs confirmés par des méthodes différentes dues à M. E. Picard.

Arrivons au travail *Sur les groupes des équations linéaires* (pp. 300-401). Il a d'abord une importance historique, car il s'appuie surtout sur les recherches de Fuchs ; c'est vraisemblablement en ce domaine que se dessinèrent les premiers résultats de Poincaré, d'où l'idée de qualifier de *fuchsiennes* les nouvelles transcendentes y découvertes. Klein ne sembla pas le comprendre tout d'abord. A la suite d'un court Mémoire *Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires*, publié aux *Mathematische Annalen* et qu'on trouvera dans le présent Volume (pp. 92-105), le géomètre allemand félicite Poincaré mais critique ses dénominations. Henri Poincaré répond doucement mais fermement que ces dénominations n'ont pas été choisies au hasard ; c'est bien à Fuchs qu'il entend rattacher le point de départ de ses recherches.

Fuchs, en effet, ouvrit un nouveau et vaste champ de recherches en appliquant les méthodes de Cauchy à l'étude des intégrales des équations linéaires. Des intégrales distinctes

$$v_1, v_2, \dots, v_p \quad (5)$$

ne peuvent se muer en d'autres et devenir ainsi plus nombreuses quand la variable tourne autour de points singuliers. Toute intégrale d'apparence nouvelle n'est qu'une fonction linéaire des  $p$  précédentes. A toutes les singularités possibles correspond un ensemble de substitutions linéaires formant un groupe et, quelles que soient les substitutions constructrices, certaines fonctions de leurs coefficients sont toujours les mêmes : ces fonctions sont des *invariants*.

Je me borne à dire que le mode de correspondance entre ces invariants et les coefficients de l'équation est précisément exprimable par les fonctions fuchsiennes. En particulier, des intégrales qui se reproduisent multipliées par  $(x-a)^\lambda$ , quand  $x$  tourne autour de  $a$ , et qui, à ce titre, sont indéniablement

multiformes, donnent des quotients où le facteur singulier disparaît, tout comme disparaissait, lors de la formation des fonctions fuchsiennes, le facteur des fonctions thêtafuchsiennes. On voit qu'il y a une certaine méthode de quotients qui joue, en Analyse, un rôle primordial, même dans des questions d'origines fort diverses.

La conclusion essentielle est que les intégrales (5) peuvent être des fonctions uniformes d'un  $z$  qui est le rapport des intégrales d'une équation du second ordre à coefficients rationnels en  $x$  et  $y$  (si  $x$  et  $y$  sont liés algébriquement). Alors  $x$  est une fonction fuchsienne (ou kleinéenne) en  $z$ . Quant aux  $p$  expressions (5) des  $\nu$  à l'aide de  $z$  ce sont les fonctions *zétafuchsiennes* pour lesquelles un Mémoire spécial (pp. 402-462) termine la série des précédents. Je ne ferai guère que le mentionner. Comme je le montrais quelques lignes plus haut, on arrive aisément à comprendre que l'équation  $\nu'' = \nu \varphi(x, y)$  soit intégrée par les fonctions fuchsiennes. Mais n'y a-t-il pas un abîme pour passer de là à l'équation linéaire d'ordre quelconque? Non. C'est un peu — que l'on me passe ici beaucoup d'imagination simplificative — comme si l'on constatait d'abord que l'équation linéaire, du second ordre, à *coefficients constants*, s'intègre par les transcendantes élémentaires; on n'aurait aucune peine à se convaincre, ensuite, que ce résultat est valable pour l'équation d'ordre quelconque. Eh bien, les fonctions fuchsiennes jouent précisément, par rapport aux équations linéaires quelconques, à coefficients algébriques, le rôle des fonctions élémentaires qui suffisent à l'intégration dans le cas des coefficients constants.

Je viens de parler, en somme, des cinq grands Mémoires relatifs aux groupes fuchsien, aux fonctions fuchsiennes, aux groupes kleinéens, aux groupes des équations linéaires, aux fonctions zétafuchsiennes, Mémoires publiés de manière continue, dans les *Acta mathematica* et qui suffiraient à eux seuls à l'immortelle renommée de leur auteur.

*Les fonctions fuchsiennes et l'Arithmétique* (pp. 463-511) n'ont pas un rapport absolument direct avec ce qui précède. Je disais incidemment, en une page précédente, que des

êtres non-euclidiens pourraient se servir des fonctions fuchsiennes, comme nous nous servons des fonctions trigonométriques, mais qu'on a peine cependant à imaginer ce que seraient leurs calculs pratiques. Les difficultés que je me représente sont surtout situées dans le domaine de l'arithmétique. Ces fameux êtres non-euclidiens seraient sans doute bien embarrassés s'ils n'avaient que celle que nous connaissons, mais nul doute qu'ils n'en aient une autre, aux moyens beaucoup plus puissants et dont les progrès auraient marché de pair avec ceux de leur analyse.

*Les fonctions fuchsiennes et l'équation  $\Delta u = e^u$*  (pp. 512-591) forment un exposé où à coup sûr, il faut reconnaître quelque complication. Si des transcendentes, de nature fuchsienne, permettent d'intégrer cette équation, elle peut aussi l'être autrement, notamment par des méthodes d'approximation étudiées par M. E. Picard. On conçoit la possibilité d'éclairer les deux choses l'une par l'autre.

*Fonctions modulaires et fonctions fuchsiennes* (pp. 592-618) terminent le Volume. Henri Poincaré écrivit ces lignes au seuil de la mort. Il envoya le manuscrit aux *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, le 7 juillet 1912, veille du jour où il entra à la clinique où il devait succomber. Et, chose bien singulière, il effectua un rapprochement qui, dans les grands travaux de sa jeunesse, ne semble l'avoir tenté que médiocrement. Se pénétrer des fonctions modulaires pour passer ensuite au cas plus général des fonctions fuchsiennes, ce n'est pas une mauvaise idée, à condition de ne pas se laisser absorber trop longtemps par les premières. Mais vraiment Henri Poincaré dédaigna cet échelon sur lequel, à la fin, il paraît cependant vouloir descendre. Au dessous, il n'y avait plus que la nuit du tombeau mais, au dessus, quelle éblouissante auréole de gloire !

NOTE. — Cet article a été écrit avant la mort de M. Darboux survenue le 23 février. La malheureuse nouvelle n'y devait rien changer. Disons seulement, avec tant d'autres voix, l'affliction de la Science française ainsi frappée de coups répétés en la personne de ses plus illustres représentants. A. B.

---