

# L'arithmotrigonométrie.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1917)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# NOTIONS D'ARITHMOGÉOMÉTRIE

PAR

Emile TURRIÈRE (Montpellier).

(4<sup>e</sup> article)<sup>1</sup>

---

## L'arithmotrigonométrie.

70. — C'est dans une pièce en date du 1<sup>er</sup> mai 1780, *De casibus quibusdam maxime memorabilibus in analysi indeterminata, ubi imprimis insignis usus calculi angulorum in analysi Diophantea ostenditur*<sup>2</sup>, que L. EULER a introduit l'usage des nombres trigonométriques pour l'étude de certaines équations de l'analyse diophantine.

Ce mémoire traite de deux problèmes; chacun d'eux est résolu d'abord par la méthode algébrique; EULER montre ensuite combien est avantageux l'usage des rapports trigonométriques de certains angles auxiliaires pour la résolution de chacun de ces deux problèmes.

Le premier problème est relatif à la résolution de l'équation du quatrième degré à quatre variables :

$$x^4 + y^4 + z^4 + v^4 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 2v^2(x^2 + y^2 + z^2) = 0 ,$$

admettant entre autres solutions entières les trois systèmes qui suivent :

$$\begin{array}{cccc} x = 20 , & y = 17 , & z = 17 , & v = 12 ; \\ 39 . & 25 , & 20 , & 12 ; \\ 78 , & 65 , & 29 , & 24 . \end{array}$$

---

<sup>1</sup> Voir l'*Enseignement mathématique*, 18<sup>e</sup> année, 15 mars 1916, pp. 81-110, et 15 novembre 1916, pp. 397-428; 19<sup>e</sup> année, 15 mai 1917, pp. 159-191.

<sup>2</sup> *Commentationes arithmeticae*, tomus posterior, pp. 366-379.

En posant

$$\frac{xy}{vz} = \sin \alpha, \quad \frac{xz}{vy} = \sin \beta,$$

EULER montre que toute la question revient à déterminer deux arcs  $\alpha$  et  $\beta$  dont les nombres trigonométriques sont rationnels et qui sont en outre tels que le produit de  $\sin \alpha$  et de  $\sin \beta$  soit un carré.

Le second problème, qui consiste de même à résoudre l'équation

$$x^4 + y^4 + z^4 + v^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2x^2v^2 - 2y^2z^2 - 2y^2v^2 - 2z^2v^2 = 0,$$

douée de solutions telles que

$$\begin{array}{cccc} x = 14, & y = 8, & z = 5, & v = 3, \\ 72, & 35, & 33, & 14, \\ 165, & 99, & 56, & 32, \end{array}$$

se traite d'une manière analogue, en posant

$$\frac{xy}{vz} = \cotang \alpha, \quad \frac{xz}{vy} = \cotang \beta,$$

et en déterminant des angles  $\alpha$  et  $\beta$ , à rapports trigonométriques rationnels, tels que

$$\cotang \alpha \cdot \cotang \beta = \square.$$

*A la même date, c'est-à-dire encore le 1<sup>er</sup> mai 1780, nous trouvons une autre pièce d'Euler consacrée aux angles d'un quadrilatère tels que leurs sinus soient proportionnels à des nombres rationnels donnés : Investigatio quadrilateri in quo singulorum angulorum sinus datam inter se teneant rationem; ubi artificia prorsus singularia in analysi Diophantea occurrunt*<sup>1</sup>.

Si, par exemple, les nombres donnés sont 15, 14, 11 et 6, les angles demandés sont :

$$A = 92^\circ 23' 16'',$$

$$B = 111^\circ 10' 06'',$$

$$C = 132^\circ 53' 14'',$$

$$D = 23^\circ 33' 24'',$$

<sup>1</sup> *Commentationes arithmeticae*, t. II, pp. 380-391.

dont la somme est bien  $360^\circ$  et dont les nombres trigonométriques sont :

$$\sin A = \frac{5}{24} \sqrt{23}, \quad \cos A = -\frac{1}{24},$$

$$\sin B = \frac{7}{36} \sqrt{23}, \quad \cos B = -\frac{13}{36},$$

$$\sin C = \frac{11}{72} \sqrt{23}, \quad \cos C = -\frac{49}{72},$$

$$\sin D = \frac{1}{12} \sqrt{23}, \quad \cos D = -\frac{11}{12}.$$

La solution de ce problème peut être obtenue d'une manière très rapide en introduisant le rapport commun de  $\sin A$ ,  $\sin B$ ,  $\sin C$  et  $\sin D$  aux nombres donnés  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$ . Si, en effet, on pose

$$\sin A = ax, \quad \sin B = bx, \quad \sin C = cx, \quad \sin D = dx,$$

la condition  $A + B + C + D = 2\pi$  se traduit par une équation du premier degré en  $x^2$ ; d'une manière générale, les expressions des quatre sinus sont irrationnelles, les nombres  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  étant multipliés par la racine carrée d'un même nombre rationnel<sup>1</sup>: c'est ce qui se produit pour les trois exemples numériques traités complètement par EULER.

71. — Cette introduction des rapports trigonométriques de certains angles dans des recherches arithmétiques, cette confrontation de la trigonométrie plane (et peut-être aussi de la trigonométrie sphérique) et de l'analyse diophantine semblent devoir présenter un intérêt comparable à celui de l'arithmogéométrie, dont le fondement n'est autre que la confrontation des grandeurs de la géométrie et des nombres rationnels.

Indépendamment des considérations d'EULER sur l'avantage que peut présenter l'introduction des angles dans l'étude de certains problèmes diophantins, j'avais rencontré — dans les derniers paragraphes de mon examen du Problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise — des équations tri-

<sup>1</sup> Il serait intéressant de rechercher, à ce propos, si, pour un choix convenable des données  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , les quatre sinus peuvent être rationnels.

gonométriques particulières<sup>1</sup>. Les théorèmes de FERMAT et de FRÉNICLE relatifs à l'inexistence d'arithmotriangles pythagoriques, dont l'aire soit un carré parfait ou le double d'un tel carré, se traduisent par des équations

$$\sin 2\theta = \square ,$$

$$2\sin 2\theta = \square ,$$

impossibles si  $\text{tang} \frac{\theta}{2}$  doit être un nombre rationnel.

Ces exemples simples suffisent pour permettre d'introduire avec clarté et précision la notion d'équation arithmo-trigonométrique. Par définition, une telle équation est une équation à coefficients rationnels dans laquelle un certain nombre d'inconnues  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont engagées par leurs seuls rapports trigonométriques et dont les solutions sont telles que  $\text{tang} \frac{x_1}{2}, \text{tang} \frac{x_2}{2}, \dots, \text{tang} \frac{x_n}{2}$  soient des nombres rationnels. En d'autres termes, ces angles  $x_1, \dots, x_n$  dont la présence dans l'équation trigonométrique, au sens habi-

<sup>1</sup> Lorsque j'écrivais, en septembre 1915, les remarques sur le problème de Léonard de Pise et de Jean de Palerme, ou même les premières pages des *Notions d'arithmogéométrie*, je me trouvais dans l'absolue impossibilité de faire la moindre recherche bibliographique. C'était donc de mémoire que je citais FERMAT à l'occasion de l'impossibilité de certaines équations.

Voici maintenant les renseignements historiques nécessaires. C'est à propos du problème 20 de BACHET [trouver un arithmotriangle pythagorique dont l'aire soit égale à un nombre donné], qui se rattache lui-même à la 26<sup>e</sup> question du VI<sup>e</sup> livre de l'*Arithmétique* de DIOPHANTE, que FERMAT observa que l'aire d'un triangle rectangle en nombres ne peut être un carré.

Cette même proposition négative se trouve aussi dans la lettre de FERMAT à CARCAVI, d'août 1659, dont une copie par HUYGENS nous a été transmise (œuvres de Fermat, t. 2, p. 431).

FRÉNICLE (*Traité des triangles rectangles en nombres*, dans lequel plusieurs belles propriétés sont démontrées par de nouveaux principes, Paris, 1676) donne ce même théorème à la page 100.

A noter aussi une pièce du 29 décembre 1678, *Invenire triangulum in numeris cujus area sit quadratus* (*Leibnizens mathematische Schriften*, Gerhardt, III, p. 120-125) dans laquelle LEIBNIZ retrouve cette même impossibilité.

LEIBNIZ établit aussi l'impossibilité de chacune des équations

$$x^3 - x = \square ,$$

$$x^4 - y^4 = \square ;$$

la première est équivalente à

$$2 \text{ tang } \theta = \square .$$

La seconde a été considérée par FERMAT (Observations sur Diophante, VI, 26).

En ce qui concerne d'autre part l'inexistence d'arithmotriangles pythagoriques dont l'aire soit le double d'un nombre carré, c'est à la page 101 du *Traité* de FRÉNICLE qu'elle est énoncée et établie. Plus loin d'ailleurs (p. 111), FRÉNICLE indique l'impossibilité de l'équation équivalente ;

$$x^4 + y^4 = \square$$

que FERMAT a de son côté mentionnée comme impossible dans son observation VI, 32.

tuel de cette expression, en fait une équation arithmotrigonométrique, sont des angles d'une espèce toute particulière que nous connaissons bien déjà : ce sont les angles des arithmotriangles pythagoriques. Dans ces conditions, l'*Arithmotrigonométrie*, c'est-à-dire l'ensemble des propriétés de toutes les équations arithmotrigonométriques, n'offre aucune originalité, mais c'est une nouvelle forme avantageuse d'exposition des faits qui constituent la « Géométrie des triangles rectangles en nombres » telle que la concevaient DIOPHANTE, FERMAT OU FRÉNICLE.

L'arithmotrigonométrie mérite d'être étudiée ici. Ce qui fait, en effet, le plus défaut dans la théorie des nombres, ce n'est pas une théorie générale ; ce n'est pas non plus une base métaphysique solide ; ce qui fait défaut, dis-je, c'est une méthode de résolution des équations en nombres rationnels ou entiers. Toute considération qui peut conduire à des moyens pratiques de détermination des solutions est la bienvenue dans le monde mystérieux des nombres. C'est ce qui me décida à consacrer tant de pages aux présentes notions d'arithmogéométrie, dès que je reconnus que l'intuition géométrique pouvait apporter quelques perfectionnements à l'analyse diophantine. C'est encore pour une raison identique que je crois devoir donner un tel développement à ces principes d'arithmotrigonométrie.

72. — Les équations qui viennent d'être rappelées ci-dessus et qui sont étroitement liées aux deux théorèmes de FERMAT et de FRÉNICLE sur l'aire d'un arithmotriangle pythagorique sont évidemment équivalentes aux équations

$$\text{tang } \theta = \square \quad \text{et} \quad 2 \text{ tang } \theta = \square ;$$

celles-ci sont donc impossibles du point de vue arithmotrigonométrique. Cette impossibilité des équations arithmotrigonométriques

$$\text{tang } \theta = \square , \quad 2 \text{ tang } \theta = \square ,$$

et des équations qui en dérivent manifestement, telles que les équations arithmotrigonométriques

$$\sin 2\theta = \square , \quad 2 \sin 2\theta = \square ,$$

ou encore des équations algébriques remarquables qui leur sont équivalentes, présente une grande importance dans la théorie des nombres et dans l'histoire de son développement. Nombreuses sont, en effet, les propositions trouvées et retrouvées sur ces différentes équations ou sur les figures géométriques (les arithmotriangles pythagoriques notamment) qui leur sont liées. En réalité, il s'agit d'une unique propriété de la théorie des nombres. Tout d'abord, il faut observer que les équations

$$\text{tang } \theta = \square, \quad 2 \sin 2\theta = \square,$$

sont identiques entre elles et qu'il en est de même des équations :

$$2 \text{tang } \theta = \square, \quad \sin 2\theta = \square.$$

Reste à prouver que les équations  $\sin 2\theta = \square$  et  $2 \sin 2\theta = \square$  sont équivalentes par changement de variable. Il suffit de remarquer que l'équation impossible

$$xy(x^4 - y^4) = \square,$$

considérée par EULER<sup>1</sup> devient

$$2XY(X^4 - Y^4) = \square,$$

au moyen de la transformation affine définie par les équations

$$x + y = X, \quad x - y = Y.$$

En posant alors

$$y = x \text{ tang } \frac{\theta}{2}$$

dans l'une et l'autre des deux équations impossibles équivalentes :

$$xy(x^4 - y^4) = \square, \quad 2xy(x^4 - y^4) = \square,$$

il vient :

$$\sin 2\theta = \square \quad \text{et} \quad 2 \sin 2\theta = \square.$$

L'impossibilité de l'une des équations entraîne donc celle de l'autre. Et, par suite, *il y a équivalence entre les deux propositions négatives de Fermat et de Frénicle relatives à*

<sup>1</sup> *Investigatio binorum numerorum formæ  $xy(x^4 - y^4)$ , quorum productum, sive quotus sit quadratum* (14, août 1780). *Commentationes arithmetice*, tomus posterior, pp. 438-446.

*l'inexistence d'arithmotriangles pythagoriques dont l'aire soit un carré ou le double d'un carré.*

73. — IMPOSSIBILITÉ DE  $\sin \theta = \square$  ET DE  $\cos \theta = \square$ , DE  $2\sin \theta = \square$  ET DE  $2\cos \theta = \square$ .

Je viens de dire que les équations arithmotrigonométriques

$$\text{tang } \theta = \square \quad \text{et} \quad 2 \text{ tang } \theta = \square$$

étaient séparément impossibles, comme attachées aux problèmes des arithmotriangles pythagoriques dont l'aire est un carré parfait ou le double d'un carré.

*Les quatre équations suivantes*

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \square, & 2 \sin \theta &= \square, \\ \cos \theta &= \square, & 2 \cos \theta &= \square, \end{aligned}$$

*sont de même séparément impossibles*, pour les raisons qui vont être données. Il y a lieu d'exposer tout d'abord que les deux équations de la seconde ligne, c'est-à-dire les équations en cosinus, sont respectivement équivalentes aux deux équations en sinus de la première ligne.

Des deux équations irréductibles l'une à l'autre qu'il convient de considérer maintenant, l'une d'elles  $\cos \theta = \square$  est équivalente à l'équation

$$x^4 - y^4 = \square$$

reconnue impossible par FERMAT à l'occasion du 26<sup>e</sup> problème du VI<sup>e</sup> livre de DIOPHANTE. De même, de l'impossibilité de l'équation

$$2(X^4 - Y^4) = \square,$$

établie par EULER, ou encore de celle de l'équation

$$x + \frac{1}{x} = \square,$$

considérée par LEIBNIZ<sup>1</sup>, il résulte que les équations, équi-

<sup>1</sup> Exercitium ad promovendam scientiam numerorum, *Leibnizens mathematische Schriften* Gerhardt, [2], III, 1863, p. 114-119.

Dans cette pièce, LEIBNIZ s'occupe de l'équation

$$x + \frac{a}{x} = \square,$$

qui peut être rattachée à l'étude arithmogéométrique d'une cubique, la cubique harmonique d'équation :

$$y^2 = x^3 + ax.$$



valentes par changement de variable  $\theta$ ,

$$2 \cos \theta = \square \quad \text{et} \quad 2 \sin \theta = \square ,$$

sont elles aussi impossibles.

74. — Les théorèmes qui précèdent présentent, en plus de leur intérêt historique, celui d'être fondamentaux dans l'étude d'un nombre respectable d'équations impossibles déjà connues. Il semble, en outre, que cette source féconde de propositions négatives soit encore loin d'être tarie.

Voici quelques nouveaux exemples de leur utilité incontestable.

Soit, en premier lieu, l'équation arithmotrigonométrique à deux indéterminées :

$$\sin u + \sin v = 1 ;$$

elle peut être transformée en l'équation équivalente :

$$\sin u = 2 \cos^2 \frac{v}{2} ,$$

c'est-à-dire :

$$2 \sin u = \square .$$

*Il est donc impossible de satisfaire à l'équation*

$$\sin u + \sin v = 1 ,$$

*avec des angles tels que  $\text{tang} \frac{u}{2}$  et  $\text{tang} \frac{v}{2}$  soient deux nombres rationnels.*

*Soit, en second lieu, à résoudre le problème de la détermination de quatre carrés en progression arithmétique.* M. E. HÆNTSCHEL vient de rappeler que ce problème avait été considéré, dans le cas de trois carrés, par DIOPHANTE et que le Problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise en était un cas particulier (voir paragraphe 76). J'ajouterai que ce même problème de trois carrés en progression arithmétique a été considéré aussi par FERMAT<sup>1</sup> et par FRÉNICLE<sup>2</sup> et que sa solution générale au moyen d'une représentation

<sup>1</sup> *Œuvres*, t. II, p. 65 et 234.

<sup>2</sup> *Traité des triangles rectangles en nombres...*, p. 27-28. FRÉNICLE donne la solution simple 49, 169, 289.

arithmotrigonométrie a été donnée plus haut (paragraphe 6: arithmotriangles automédiants).

Le problème de quatre carrés en progression arithmétique se traduit par les équations

$$x^2 - y^2 = y^2 - z^2 = z^2 - t^2 ,$$

qui deviennent

$$x^2 + z^2 = 2y^2 , \quad y^2 + t^2 = 2z^2 .$$

Conformément aux conclusions du paragraphe 6, je poserai donc

$$x = y(\cos \alpha - \sin \alpha) ,$$

$$z = y(\cos \alpha + \sin \alpha) ,$$

$$y = z(\cos \beta + \sin \beta) ,$$

$$t = z(\cos \beta - \sin \beta) ;$$

d'où il résulte que les angles  $\alpha$  et  $\beta$  doivent satisfaire à l'équation arithmotrigonométrique

$$(\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos \beta + \sin \beta) = 1 ,$$

ou encore

$$\cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = 1 .$$

Celle-ci est impossible d'après le résultat qui vient d'être obtenu à l'instant. *Il est donc impossible de déterminer quatre carrés en progression arithmétique.*

### Sur certains arithmotriangles pythagoriques.

75. — L'examen du plus célèbre des arithmotriangles pythagoriques, celui des harpedonaptes égyptiens, donne l'idée de former des équations arithmotrigonométriques fort simples que je vais étudier. Les sinus et cosinus des angles aigus de ce triangle sont :

$$\frac{3}{5} \quad \text{et} \quad \frac{4}{5} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} .$$