Sur certains arithmotriangles pythagoriques.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1917)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

arithmotrigonométrique a été donnée plus haut (paragraphe 6: arithmotriangles automédians).

Le problème de quatre carrés en progression arithmétique se traduit par les équations

$$x^2 - y^2 = y^2 - z^2 = z^2 - t^2 ,$$

qui deviennent

$$x^2 + z^2 = 2y^2 , \qquad y^2 + t^2 = 2z^2 .$$

Conformément aux conclusions du paragraphe 6, je poserai donc

$$x = y(\cos\alpha - \sin\alpha) ,$$
$$z = y(\cos\alpha + \sin\alpha) ,$$
$$y = z(\cos\beta + \sin\beta) ,$$
$$t = z(\cos\beta - \sin\beta) ;$$

d'où il résulte que les angles α et β doivent satisfaire à l'équation arithmotrigonométrique

$$(\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\beta + \sin\beta) = 1 ,$$

ou encore

$$\cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = 1 .$$

Celle-ci est impossible d'après le résultat qui vient d'être obtenu à l'instant. *Il est donc impossible de déterminer quatre carrés en progression arithmétique.*

Sur certains arithmotriangles pythagoriques.

75. — L'examen du plus célèbre des arithmotriangles pythagoriques, celui des harpedonaptes égyptiens, donne l'idée de former des équations arithmotrigonométriques fort simples que je vais étudier. Les sinus et cosinus des angles aigus de ce triangle sont :

$$\frac{3}{5} \quad \text{et} \quad \frac{4}{5} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} .$$

Quels sont d'une manière générale les arithmotriangles pythagoriques tels que

$$\sin \theta = \frac{1}{1+\lambda^2} ?$$

La solution *générale* de cette équation arithmotrigonométrique s'obtient aisément par considération d'une arithmocubique unicursale ; on doit poser

$$\operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = 2\lambda^2 ,$$

et, par suite :

$$\sin \theta = \frac{1}{1+\left(\frac{2\lambda^2-1}{2\lambda}\right)^2} .$$

De même l'équation

$$\cos \theta = \frac{1}{1+\lambda^2} ,$$

qui n'est d'ailleurs pas essentiellement distincte de la précédente, se laisse résoudre en toute généralité en posant :

$$\operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = \frac{2\lambda^2-1}{2\lambda^2+1} .$$

Il convient de noter que cette question fournit des solutions particulières des deux équations

$$\sin \theta = \square + \square ,$$
$$\cos \theta = \square + \square ,$$

qui seront étudiées quelques pages plus loin (paragraphe 80).

76. — Le théorème de Fermat sur le nombre 7. — Pour le même arithmotriangle pythagorique (3, 4, 5), on a $\operatorname{tang} \theta = \frac{3}{4} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$; cette dernière relation donne naissance à une question intéressante en elle-même, qui se rattache à une fort belle proposition de Fermat :

Quelle est la solution générale de l'équation

$$\operatorname{tang} \theta = 1 - \lambda^2$$

en nombres rationnels $\frac{\theta}{2}$ *et* λ *?*

Cette équation se transforme immédiatement en la suivante :

$$\frac{1 - y^2}{2y} = 1 - x^2 ,$$

représentative d'une cubique plane. Considérée comme une équation du second degré en y, cette équation dépend du point de vue arithmogéométrique d'une équation

$$x^4 - 2x^2 + 2 = \square$$

de Brahmagupta-Fermat généralisée. A cette même équation, ou d'une manière plus précise à l'équation équivalente

$$2x^4 - 2x^2 + 1 = \square ,$$

se ramène d'ailleurs le problème des arithmodistances pour l'origine et l'hyperbole équilatère $y = \frac{x^2 - 1}{x}$.

Mais ce qui est encore plus digne de retenir notre attention c'est que la question envisagée n'est point distincte d'un problème qui a son histoire : l'étude d'une propriété caractéristique du nombre entier 7. FERMAT [1], en effet, a remarqué le premier que, *seul dans la suite des entiers, le nombre 7 jouit de la propriété d'être, ainsi que son carré, de la forme* $2u^2 - 1$; en d'autres termes, les équations simultanées

$$2y^2 - 1 = x ,$$
$$2z^2 - 1 = x^2 ,$$

n'admettent, *en nombres entiers*, que l'unique solution :

$$x = 7 , \quad y = 2 , \quad z = 5 .$$

Je n'insisterai guère sur ce problème de FERMAT, qui se rattache encore à la théorie des arithmopoints d'une biquadratique gauche ; je me bornerai à mettre en lumière sa

[1] Sur ce problème de FERMAT, cf. t. 2 des *Œuvres de Fermat*, pp. 434-446 et d'autre part :
CH. HENRY, Recherches sur les manuscrits de Fermat, p. 176.
T. PÉPIN, Sur un théorème de Fermat *(Atti dell' Accademia pontificia dei nuovi Lincei*, t. 36, 1883, p. 23-33.
A. GENOCCHI, Démonstration d'un théorème de Fermat, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. 2, 1883, p. 306-310.

liaison avec l'équation précédente ; cette liaison résultant de l'équation

$$z^2 = 2y^4 - 2y^2 + 1 ,$$

de l'une des projections de la biquadratique de l'espace. Comme nouvelle solution simple de cette équation, j'ai trouvé :

$$x = -\frac{31}{49} , \quad y = \frac{3}{7} , \quad z = \frac{41}{49} , \quad \text{tang}\, \frac{\theta}{2} = \frac{4}{5} , \quad \text{tang}\, \theta = -\frac{40}{9} .$$

La solution primitive de Fermat correspond précisément à l'angle de l'arithmotriangle pythagorique de côtés 3, 4 et 5. Celle que j'en ai déduite met en évidence deux nombres,

$$\frac{31}{49} \quad \text{et} \quad \frac{41}{49} ,$$

qui ont une grande signification, si l'on se reporte à mon article sur *le problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise*[1] ou à la lettre de M. HAENTZCHEL[2] sur ce même travail : la solution de DIOPHANTE, pour le problème des trois nombres carrés en progression arithmétique,

$$\overline{41}^2 - 720 = \overline{31}^2 , \ \overline{41}^2 \quad \text{et} \quad \overline{41}^2 + 720 = \overline{49}^2 ,$$

et la solution équivalente de LÉONARD DE PISE

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2 , \quad \left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \left(\frac{31}{12}\right)^2 ,$$

pour le problème qui constituait la première des trois questions de JEAN DE PALERME, mettent précisément en évidence les trois nombres 31, 41 et 49. Simple coïncidence, mais coïncidence bien curieuse !

77. — Dans les paragraphes précédents, les relations

$$\cos \theta = \frac{4}{5} , \quad \text{tang}\, \theta = \frac{3}{4} ,$$

[1] *L'Enseignement Mathématique*, 17e année 1915, pp. 315-324.
[2] *Ibid.*, 19e année, 1917, pp. 199-201.

m'ont amené à étudier *séparément* les deux équations arithmotrigonométriques

$$\cos\theta = \frac{1}{1+\square}, \quad \text{tang} = 1 - \square .$$

Il y a lieu maintenant de rechercher ceux des arithmotriangles pythagoriques qui, comme celui dont les côtés sont 3, 4 et 5, satisfait *simultanément* à ces deux équations.

Partant de la première des équations,

$$\cos\theta = \frac{1}{1+\square},$$

dont la solution *générale* est donnée par les formules

$$\text{tang}\,\frac{\theta}{2} = \frac{2-\lambda^2}{2+\lambda^2}, \quad \cos\theta = \frac{4\lambda^2}{\lambda^4+4};$$

il faut égaler à une quantité indéterminée $1-\mu^2$ l'expression

$$\text{tang}\,\theta = \frac{4-\lambda^4}{4\lambda^2};$$

d'où l'équation

$$\frac{4-\lambda^4}{4\lambda^2} = 1-\mu^2;$$

elle s'écrit encore

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 - 4 = (2\mu\lambda)^2 .$$

Le problème étudié se ramène donc à l'équation

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 - 4 = \square ,$$

qui admet pour solution $\lambda = \infty$, $\lambda = 1$ (arithmotriangle 3, 4, 5), $\lambda = \frac{5}{2}$; à cette dernière solution correspond un arithmotriangle pythagorique de côtés 400, 561 et 689, pour lequel

$$\cos\theta = \frac{1}{1+\left(\frac{17}{20}\right)^2} = \frac{400}{689},$$

$$-\,\text{tang}\,\theta = \frac{561}{400} = 1 - \left(\frac{31}{20}\right)^2 ;$$

c'est donc actuellement le supplément d'un des angles aigus de l'arithmotriangle dont la tangente trigonométrique est de la forme spécifiée dans l'énoncé du problème.

En posant alors

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 - 4 = \left(\lambda^2 - 2x + \frac{2}{3}\right)^2,$$

le problème est ramené à l'étude d'une fonction $\wp$ de Weierstrass d'invariants

$$g_2 = -\frac{8}{3} \quad \text{et} \quad g_3 = -\frac{80}{27}.$$

Arithmotriangles pythagoriques dont les trois côtés sont sommes de deux carrés.

78. — Le théorème de Fermat. — L'importance des nombres sommes de deux carrés[1] est assez grande; elle est surtout due aux belles recherches qui ont été faites autour d'un théorème célèbre de *Fermat*[2]. C'est à l'occasion du problème de la détermination du moindre nombre qui soit autant de fois qu'on voudra et non plus la somme de deux carrés, problème proposé par Frénicle, dans une lettre adressée le 6 septembre 1641 à Fermat, que ce dernier énonça le théorème suivant : *Si un nombre* p *compris dans la forme* $4n + 1$ *est premier ou composé de facteurs premiers de cette forme,* p *est la somme de deux carrés.* En remarquant que les facteurs puissances de 2 n'altèrent point cette propriété, en vertu de l'identité

$$2(b^2 + c^2) = (b + c)^2 + (b - c)^2,$$

il est possible de présenter ce théorème de Fermat sous la forme générale et précise qui suit :

---

[1] Initialement considérés par Diophante (II, 8, 9 et 10), puis par Viète (Zeteticorum libri, IV, 2, 3).

[2] *Œuvres de Fermat*, t. I, p. 293; t. II, p. 213, 221, 403 et 432; t. III, p. 243, 315. — S. Réalis: Scolies pour un théorème de Fermat, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3), t. 4, 1885, p. 367-372. — Le théorème de Fermat a été démontré par Euler (*Nouveaux commentaires de Pétersbourg*, t. IV, p. 3 et t. V, p. 3), Legendre et Smith. Edouard Lucas en a donné une très curieuse démonstration géométrique par les *satins carrés*.