

# Arithmotriangles pythagoriques dont les trois côtés sont sommes de deux carrés.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1917)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

c'est donc actuellement le supplément d'un des angles aigus de l'arithmotriangle dont la tangente trigonométrique est de la forme spécifiée dans l'énoncé du problème.

En posant alors

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 - 4 = \left(\lambda^2 - 2x + \frac{2}{3}\right)^2,$$

le problème est ramené à l'étude d'une fonction  $\mathcal{J}$  de WEIERSTRASS d'invariants

$$g_2 = -\frac{8}{3} \quad \text{et} \quad g_3 = -\frac{80}{27}.$$

### Arithmotriangles pythagoriques dont les trois côtés sont sommes de deux carrés.

78. — LE THÉORÈME DE FERMAT. — L'importance des nombres sommes de deux carrés<sup>1</sup> est assez grande; elle est surtout due aux belles recherches qui ont été faites autour d'un théorème célèbre de *Fermat*<sup>2</sup>. C'est à l'occasion du problème de la détermination du moindre nombre qui soit autant de fois qu'on voudra et non plus la somme de deux carrés, problème proposé par FRÉNICLE, dans une lettre adressée le 6 septembre 1641 à FERMAT, que ce dernier énonça le théorème suivant : *Si un nombre p compris dans la forme 4n + 1 est premier ou composé de facteurs premiers de cette forme, p est la somme de deux carrés.* En remarquant que les facteurs puissances de 2 n'altèrent point cette propriété, en vertu de l'identité

$$2(b^2 + c^2) = (b + c)^2 + (b - c)^2,$$

il est possible de présenter ce théorème de FERMAT sous la forme générale et précise qui suit :

<sup>1</sup> Initialement considérés par DIOPHANTE (II, 8, 9 et 10), puis par VIÈTE (Zeteticorum libri, IV, 2, 3).

<sup>2</sup> *Œuvres de Fermat*, t. I, p. 293; t. II, p. 213, 221, 403 et 432; t. III, p. 243, 315. — S. RÉALIS : *Scolies pour un théorème de Fermat*, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3), t. 4, 1885, p. 367-372. — Le théorème de FERMAT a été démontré par EULER (*Nouveaux commentaires de Pétersbourg*, t. IV, p. 3 et t. V, p. 3), LEGENDRE et SMITH. Edouard LUCAS en a donné une très curieuse démonstration géométrique par les *satins carrés*.

*Si un nombre entier n'a que des facteurs 2<sup>n</sup> ou premiers de la forme 4k + 1, il est la somme de deux carrés.*

Le théorème s'étend immédiatement aux nombres rationnels ; en remarquant avec EULER que *les diviseurs d'un nombre somme de deux carrés jouissent de la même propriété*, et en remplaçant l'équation

$$\frac{A}{B} = \square + \square ,$$

par l'équation équivalente

$$AB = \square + \square ,$$

on obtient le théorème général suivant :

*La condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre entier ou fractionnaire soit somme de deux carrés est que cet entier ou les deux termes entiers de la fraction n'aient que des facteurs des formes 2<sup>n</sup> et 4k + 1.*

**79. — LE PROBLÈME DES ARITHMOTRIANGLES PYTHAGORIQUES A COTÉS SOMMES DE DEUX CARRÉS. —** Les équations arithmotrigonométriques

$$\sin \theta = \square , \quad \cos \theta = \square , \quad \text{tang } \theta = \square ,$$

étant toutes trois séparément impossibles, *il n'existe aucun arithmotriangle pythagorique ayant plus d'un côté carré parfait.* Comme, parmi les nombres non carrés, les plus simples sous le point de vue de la constitution par sommes de carrés, sont les sommes de deux carrés, je me suis naturellement posé la question suivante : *Existe-t-il des arithmotriangles pythagoriques dont les trois côtés sont simultanément sommes de deux carrés ?*

La réponse à cette question est affirmative : il existe une infinité de solutions, telles que celle qui correspond aux trois côtés

$$\begin{aligned} 9 &= 3^2 , \\ 40 &= 2^2 + 6^2 . \\ 41 &= 4^2 + 5^2 . \end{aligned}$$

Dans cet exemple, la plus petite des cathètes est mesurée par le nombre 9. D'une manière générale, puisque l'hypo-

ténuse d'un arithmotriangle pythagorique ne peut jamais être mesurée par un nombre multiple de 3, puisque, au contraire, l'un des côtés est toujours mesuré par un multiple de 3<sup>1</sup>, et puisque, enfin, ce nombre 3 ne saurait être somme de deux carrés, comme étant de la forme  $4k - 1$ , une première propriété des arithmotriangles pythagoriques spécialement étudiés ici est que :

*Dans tout arithmotriangle pythagorique dont les trois côtés sont simultanément sommes de deux carrés, l'une des deux cathètes est mesurée par un nombre divisible par 9 (ou par une puissance paire de 3). Il en est de même des mesures de la hauteur relative à l'hypoténuse et de l'aire du triangle.*

D'autre part, comme conséquences de la propriété d'invariance par multiplication entre eux des nombres sommes de deux carrés, il est évident que :

*L'aire (qui ne peut jamais être un carré parfait) et la hauteur relative à l'hypoténuse d'un arithmotriangle pythagorique dont les côtés sont tous trois sommes de deux carrés sont aussi mesurées par des nombres de cette nature.*

Ces propriétés générales établies, j'aborde la recherche même de ces triangles.

80. — L'ÉQUATION  $\cos \theta = \square + \square$ . Soit  $\text{tang} \frac{\theta}{2} = x$ ; puisque le dénominateur  $1 + x^2$  de la fraction rationnelle exprimant  $\cos \theta$ , en fonction de  $x$ , est une somme de deux carrés, il faut et il suffit qu'il en soit de même du numérateur  $1 - x^2$ . Posant

$$1 - x^2 = y^2 + z^2,$$

on ramène le problème à l'étude de l'arithmosphère d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1;$$

si  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont alors les coordonnées d'un arithmopoint quelconque de cette arithmosphère, l'expression de  $\cos \theta$  est :

$$\cos \theta = \left( \frac{xz + y}{1 + x^2} \right)^2 + \left( \frac{yz - x}{1 + x^2} \right)^2.$$

<sup>1</sup> Ces deux théorèmes sont dus à FRÉNICLE (*loc. cit.*, p. 77 et 76 respectivement).

Telle est l'élégante solution du problème. Il suffit alors d'exprimer, conformément au paragraphe 8, les trois coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$  en fonction de deux paramètres pour avoir une expression de  $\cos \theta$ .

L'équation  $\sin \theta = \square + \square$  n'est pas différente de la précédente. Pour la résoudre directement, il suffit d'observer que la solution générale consiste à poser :

$$\operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = \alpha^2 + \beta^2 .$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant deux nombres rationnels quelconques.

81. — Pour revenir au problème posé, il suffit d'observer que, par similitude, on peut rendre l'hypoténuse carré parfait ou somme de deux carrés parfaits. Le problème se traduit donc par les deux équations simultanées :

$$\sin \theta = \square + \square \quad \text{et} \quad \cos \theta = \square + \square .$$

La première de ces équations est résolue par

$$t = \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = \alpha^2 + \beta^2 ;$$

la seconde équation donne alors la condition

$$1 - t^2 = \square + \square ,$$

ou

$$1 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 + \gamma^2 + \delta^2 .$$

Nous devons ainsi considérer l'arithmosphère de rayon rationnel et choisir parmi son infinité double d'arithmopoints ceux qui ont une coordonnée somme de deux carrés. Les formules de représentation impropre étant

$$x = \frac{(1 - u^2)(1 - v^2)}{(1 + u^2)(1 + v^2)} , \quad y = 2v \cdot \frac{1 - u^2}{(1 + u^2)(1 + v^2)} , \quad z = \frac{2u}{1 + u^2} ,$$

un choix est tout indiqué, en raison de la grande simplicité de l'expression de  $z$  ; il suffira de prendre pour  $u$  une somme de deux carrés. D'où le théorème définitif :

*Une famille d'arithmotriangles pythagoriques dont les trois*

côtés sont simultanément sommes de deux carrés est caractérisée et définie par l'équation

$$\operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = \frac{2(\lambda^2 + \mu^2)}{1 + (\lambda^2 + \mu^2)^2},$$

qui exprime la tangente trigonométrique de l'un des angles aigus en fonction de deux nombres rationnels arbitraires  $\lambda$  et  $\mu$ .

Pour  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$ , on obtient  $\operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = \frac{4}{5}$  et, par suite,

$$\sin \theta = \frac{40}{41} = \left(\frac{32}{41}\right)^2 + \left(\frac{24}{41}\right)^2,$$

$$\cos \theta = \frac{9}{41} = \left(\frac{12}{41}\right)^2 + \left(\frac{15}{41}\right)^2,$$

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{40}{9} = 2^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2;$$

cette solution correspond précisément au triangle dont les côtés ont été initialement donnés à titre d'exemple.

Pour  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 2$ , il vient de même  $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{5}{13}$ ,  $\sin \theta = \frac{65}{97}$ ,  $\cos \theta = \frac{72}{97}$ ,  $\operatorname{tg} \theta = \frac{65}{72}$ ; l'arithmotriangle pythagorique correspondant a pour côtés

$$65 = 1^2 + 8^2,$$

$$72 = 6^2 + 6^2,$$

$$97 = 4^2 + 9^2.$$

Une autre famille étendue de solutions particulières est donnée par l'expression de l'ordonnée  $y$

$$y = 2\nu \cdot \frac{1 - u^2}{(1 + u^2)(1 + \nu^2)};$$

il suffit manifestement de poser

$$\nu(1 - u^2) = \lambda^2 + \mu^2$$

pour obtenir (en remplaçant  $u$  par  $\nu$  pour raison d'élégance dans l'aspect de la formule)

$$\operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = \frac{2(\lambda^2 + \mu^2)}{(1 + \nu^2) \left[ 1 + \left( \frac{\lambda^2 + \mu^2}{1 - \nu^2} \right)^2 \right]}$$

une expression de  $\text{tang} \frac{\theta}{2}$  en fonction de trois indéterminées rationnelles  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $\nu$ .

Pour  $\nu = 0$  cette famille se réduit à la précédente. Nous aurons donc obtenu une solution particulière triplement indéterminée.

Dans ces conditions, l'étude du problème dans toute sa généralité est abordable. Pour obtenir la solution générale, il est indispensable d'avoir recours aux formules

$$x = \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2 + 1}, \quad y = \frac{2\eta}{\xi^2 + \eta^2 + 1}, \quad z = \frac{\xi^2 + \eta^2 - 1}{\xi^2 + \eta^2 + 1},$$

de la représentation propre de l'arithmosphère de rayon rationnel; la question se traduit par une équation

$$(x^2 + y^2)(\xi^2 + \eta^2) + x^2 + y^2 - \xi^2 - \eta^2 + 1 = 0$$

du quatrième degré en  $x$ ,  $y$ ,  $\xi$  et  $\eta$ . Pour éviter l'introduction de notions d'hypergéométrie, il suffit de prendre l'une de ces indéterminées  $\eta$  pour paramètre et les trois autres pour coordonnées dans l'espace à trois dimensions  $(x, y, \xi)$ ; le problème se rattache donc à l'étude arithmotrigonométrique d'un faisceau de surfaces du quatrième degré.

Il est aussi avantageux de ramener cette même question à l'étude d'une  $\infty^2$  de quartiques planes<sup>1</sup>. Si  $y$  et  $\eta$  sont pris

<sup>1</sup> Cette dernière considération peut être présentée sous une autre forme. La question est équivalente à la recherche de deux des arithmopoints d'une arithmohyperbole équilatère, représentée par l'équation

$$xy = x + y + 1,$$

qui ont des coordonnées simultanément sommes de deux carrés telles que les suivantes :

$$x = 9, \quad y = \frac{5}{4},$$

$$x = 17, \quad y = \frac{9}{8},$$

$$x = 129, \quad y = \frac{65}{4}, \quad \text{etc.}$$

L'arithmogéométrie apparaît de plus en plus comme capable de provoquer des recherches sur des questions originales ressortissant de la théorie des nombres. Ici, par exemple, se pose une question, que je n'ai pas étudiée mais qui, de prime abord, semble avoir quelque intérêt: *Etant donnée une équation  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$  à deux ou plusieurs indéterminées, rechercher celles de ses solutions qui sont formées par des nombres  $x_1 \dots x_n$  tous sommes de deux carrés.* C'est une sorte d'extension de l'équation

$$Ax^4 + Bx^2 + C = y^2,$$

qui traduit le problème de la détermination des arithmopoints d'une parabole  $y = Ax^2 + Bx + C$  à coordonnées exprimées par deux carrés parfaits, et d'une manière générale des équations  $f(x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2) = 0$ .

pour paramètres, et si  $x$  et  $\xi$  sont pris pour coordonnées dans un certain plan, cette quartique est la projection d'une biquadratique gauche, intersection du paraboloidé, représenté dans un espace  $(x, \xi, \zeta)$  par l'équation

$$x\xi = \zeta,$$

et d'une quadrique rapportée à ses axes :

$$(\eta^2 + 1)x^2 + (y^2 - 1)\xi^2 + \zeta^2 = \eta^2 - y^2 - 1 - y^2\eta^2.$$

82. — L'ÉQUATION  $\text{tang } \theta = \square + \square$ . Avant de passer à une nouvelle question, quelques lignes s'imposent au sujet de l'équation  $\text{tang } \theta = \square + \square$ , ou de l'équation équivalente  $\text{cotang } \theta = \square + \square$ .

Cette équation arithmotrigonométrique se traduit algébriquement sous la forme

$$\frac{x^2 - 1}{2x} = \square + \square,$$

c'est-à-dire encore :

$$x^2 - 1 = x(y^2 + z^2);$$

cette dernière équation représente, dans l'espace ordinaire, une surface du troisième degré (voir paragraphe 36) sur laquelle existent tous les arithmopoints qui correspondent aux solutions des équations *simultanées*  $\sin \theta = \square + \square$  et  $\cos \theta = \square + \square$ . De sorte que la solution de l'équation  $\text{tang } \theta = \square + \square$  dépend de celle du problème qui vient d'être traité dans les paragraphes précédents.

### L'arithmotrigonométrie et les arithmotriangles héroniens.

83. — APPLICATION DE LA NOTION D'ARITHMODISTANCE. J'ai souvent utilisé dans les considérations antérieures la notion d'arithmodistance et introduit le *problème des arithmodistances*, soit pour créer de nouveaux types d'équations indéterminées, soit pour rattacher à une idée générale certaines équations particulières.

En se bornant au cas de l'arithmocourbe plane (C), dont