

# Arithmotriangles à médianes rationnelles.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1917)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

La solution du problème général des arithmodistances aux sommets d'un arithmotriangle résulte alors des considérations qui précèdent. Soit, en effet, une droite issue d'un sommet, A par exemple, et contenant les deux solutions particulières mais dépendant d'un paramètre arbitraire, D sur le cercle circonscrit et E sur le côté BC. Sur cette droite ADE le problème des arithmodistances s'exprime par les deux équations :

$$\begin{cases} y^2 = b^2 + x^2 - 2bx \cos \beta , \\ z^2 = c^2 + x^2 - 2cx \cos \gamma , \end{cases}$$

$\beta$  et  $\gamma$  étant les angles de la droite ADE avec les deux côtés partant du sommet A ; les cosinus de ces angles sont rationnels puisque les côtés des triangles ABE et ACE sont rationnels. Les deux équations qui précèdent représentent deux cylindres du second ordre et, par suite, sur la droite considérée ADE, le problème des arithmodistances aux sommets de ABC se rattache à l'étude d'une biquadratique gauche. Cette biquadratique gauche engendre évidemment la surface du quatrième degré, lorsque ADE pivote autour de A.

*Sur la surface du quatrième degré attachée au problème des arithmodistances aux sommets d'un triangle, il existe donc une triple infinité (à un paramètre) de biquadratiques gauches. Chacune de ces biquadratiques gauches admet des arithmopoints connus, situés sur les arithmoconiques de la surface.*

### Arithmotriangles à médianes rationnelles.

98. — ARITHMOTRIANGLES A MÉDIANES RATIONNELLES. D'une manière générale, le centre de gravité de l'aire d'un arithmotriangle n'est pas une solution particulière du problème des arithmodistances attaché à ce triangle, car les médianes ne sont pas généralement mesurées rationnellement. Le difficile problème qui consiste à déterminer les triangles dont les côtés et les médianes sont rationnellement mesurés a été l'objet de toute une série de Mémoires de L. EULER :

a) *Solutio problematis de inveniendō triangulo in quo rectæ ex singulis angulis latera opposita bisecantes sint rationales*

(1772), [Leonhardi Euleri Commentationes arithmeticae collectae, tomus prior, Petropoli, 1849, pp. 507-515].

b) *Investigatio trianguli, in quo distantiae angulorum ab ejus centro gravitatis rationaliter exprimantur* (1778) [ibid., tomus posterior, Petropoli, 1849, pp. 294-301].

c) *Solutio facilior problematis Diophantei circa triangulum, in quo rectae ex angulis latera opposita bisecantes rationaliter exprimantur* (1779) [ibid., tomus posterior, pp. 362-365].

d) *Problème de géométrie, résolu par l'analyse de Diophante* (1782) [ibid., tomus posterior, pp. 488-491].

Comme solutions simples, Euler donne dans ces divers mémoires les suivantes :

$a = 68$	$b = 87$	$c = 85$	$m_a = 158$	$m_b = 127$	$m_c = 131$
159	325	314	619	377	404
477	277	446	569	861	640

$a, b, c$  étant les côtés et  $m_a, m_b, m_c$  les médianes des triangles considérés.

e) Il faut en outre mentionner un fragment relatif à ces mêmes triangles : *Fragmenta commentationis cujusdam majoris, de invenienda relatione inter latera triangulorum quorum area rationaliter exprimi possit* (ibid., tomus posterior, pp. 648-651). La pièce débute par quelques considérations sur les triangles que nous nommons actuellement les arithmotriangles héroniens (pp. 648-649); puis Euler étudie, au titre de problème analogue, celui des arithmotriangles à médianes rationnelles (pp. 649-650): « quod autem illo difficilius est judicandum quoniam non generaliter solvi patitur ».

Ce problème consiste donc à résoudre le système suivant de trois équations

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = \square,$$

$$2(c^2 + a^2) - b^2 = \square,$$

$$2(a^2 + b^2) - c^2 = \square.$$

J'observerai que le problème qui consiste à déterminer un arithmotriangle  $(a, b, c)$  admettant une médiane rationnelle

(sans se préoccuper de la nature des deux autres) est résoluble de la manière suivante. L'équation du problème

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = \square ,$$

mise sous la forme

$$2(b^2 + c^2) = a^2 + \square ,$$

est susceptible d'être mise sous la nouvelle forme

$$(b + c)^2 + (b - c)^2 = a^2 + \square ;$$

il résulte de la théorie de l'arithmocercle que cette dernière équation admet pour solution générale

$$a = (b + c) \cos \alpha + (b - c) \sin \alpha ;$$

$b$  et  $c$  restent arbitraires,  $a$  est déterminé par cette équation, dans laquelle  $\alpha$  est un arc tel que  $\text{tang} \frac{\alpha}{2}$  est rationnel (je ne discute pas les conditions d'existence du triangle).

Il résulte de la remarque qui précède que, dans tout arithmotriangle à médianes rationnelles, les trois côtés  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sont liés entre eux par trois relations linéaires et homogènes

$$a = (b + c) \cos \alpha + (b - c) \sin \alpha ,$$

$$b = (c + a) \cos \beta + (c - a) \sin \beta ,$$

$$c = (a + b) \cos \gamma + (a - b) \sin \gamma ,$$

dans lesquelles  $\text{tang} \frac{\alpha}{2}$ ,  $\text{tang} \frac{\beta}{2}$ ,  $\text{tang} \frac{\gamma}{2}$  sont trois nombres rationnels algébriques

$$\text{tang} \frac{\alpha}{2} = x , \quad \text{tang} \frac{\beta}{2} = y , \quad \text{tang} \frac{\gamma}{2} = z ;$$

ces trois nombres sont assujettis à vérifier certaines inégalités assurant l'existence effective du triangle et une relation de compatibilité que je retiendrai seule :

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos \alpha + \sin \alpha & \cos \alpha - \sin \alpha \\ \cos \beta - \sin \beta & -1 & \cos \beta + \sin \beta \\ \cos \gamma + \sin \gamma & \cos \gamma - \sin \gamma & -1 \end{vmatrix} = 0 .$$

En posant, pour abrégier l'écriture

$$2X = x^2 - 1, \quad 2Y = y^2 - 1, \quad 2Z = z^2 - 1,$$

cette condition prend la forme :

$$\begin{vmatrix} X + 1 & X - x & X + x \\ Y + y & Y + 1 & Y - y \\ Z - z & Z + z & Z + 1 \end{vmatrix} = 0;$$

par développement du déterminant, cette équation se réduit finalement à celle

$$\begin{aligned} 3xyz(x + y + z) + x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2) \\ + x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy = 1, \end{aligned}$$

d'une surface algébrique du quatrième ordre dépourvue de ligne double.

Il y a, d'après ce qui précède, équivalence entre le problème d'EULER et l'étude arithmogéométrique de la surface précédente. A tout arithmotriangle à médianes simultanément rationnelles correspondent des arithmopoints de la surface, puisque les équations en  $\alpha, \beta, \gamma$  sont du second degré en  $x$ , en  $y$  et en  $z$ . Inversement à tout arithmopoint de la surface correspond une solution  $(a, b, c)$  définie à un même facteur près, dont l'existence correspond à une similitude arbitraire des triangles solutions.

Quant à l'étude arithmogéométrique de la surface mise en évidence, elle est immédiate, si l'on observe que c'est une surface du quatrième degré, admettant d'ailleurs quatre séries de sections planes simples ( $x = \text{const.}$ ,  $y = \text{const.}$ ,  $z = \text{const.}$ ,  $x + y + z = \text{const.}$ ) qui sont des cubiques planes. De tout arithmopoint connu *a priori* ou par un procédé quelconque, se déduisent donc immédiatement quatre cubiques non complanés douées d'arithmopoints.

99. — Il est intéressant de noter en passant que *dans tout arithmotriangle pythagorique la médiane relative à l'hypoténuse est seule rationnelle*. Cette question n'est point traitée

dans les *Commentationes arithmeticae*, mais elle conduit à l'étude des équations simultanées

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= \square, \\x^2 + 4y^2 &= \square,\end{aligned}$$

entre les cathètes d'un triangle, ces équations exprimant respectivement que le triangle est rectangle et que l'une des médianes relatives à l'une des cathètes est rationnelle. Ce système impossible a été considéré par EULER, dans le supplément de la pièce du 5 juin 1780, citée au paragraphe 87, à l'occasion de l'inexistence d'arithmotriangles télémétriques.

100. — Le problème traité par EULER dans son Mémoire qui a pour titre *Recherches sur le problème de trois nombres carrés tels que la somme de deux quelconques, moins le troisième, fasse un nombre carré* (Leonhardi Euleri, *Commentationes arithmeticae collectae, tomus posterior, Petropoli, 1849, pp. 603-616*) se rattache manifestement par analogie au problème des arithmotriangles à médianes rationnelles. Les équations sont ici

$$\begin{aligned}b^2 + c^2 - a^2 &= \square = p^2, \\c^2 + a^2 - b^2 &= \square = q^2, \\a^2 + b^2 - c^2 &= \square = r^2;\end{aligned}$$

Euler en signale toute une série de solutions particulières, telles que

	I	II	III	IV	V
$a =$	241	397	425	595	493
$b =$	269	593	373	769	797
$c =$	149	707	205	965	937

auxquelles correspondent respectivement les nombres :

	I	II	III	IV	V
$p =$	191	833	23	1081	1127
$q =$	89	553	289	833	697
$r =$	329	97	527	119	289

Ici encore, en posant

$$a = b \cos \alpha + c \sin \alpha ,$$

$$b = c \cos \beta + a \sin \beta ,$$

$$c = a \cos \gamma + b \sin \gamma ,$$

avec  $\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} = x$ ,  $\operatorname{tang} \frac{\beta}{2} = y$ ,  $\operatorname{tang} \frac{\gamma}{2} = z$  le problème se ramène à l'étude arithmogéométrique d'une surface dont le premier membre de l'équation est le développement du déterminant exprimant la compatibilité entre les relations qui précèdent :

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \beta & -1 & \cos \beta \\ \cos \gamma & \sin \gamma & -1 \end{vmatrix} = 0 ;$$

cette surface est représentée par l'équation du sixième degré :

$$\begin{aligned} x^2 y^2 z^2 + xyz(x + y + z) - 4xyz - (x - y)(y - z)(z - x) \\ + x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0 . \end{aligned}$$

Quoique le degré de cette surface soit aussi élevé, il se trouve qu'en raison de la nature de sa courbe à l'infini, une grande simplification se produit ici. Les sections par les plans parallèles à l'un quelconque des plans coordonnés sont, en effet, des quartiques planes. En outre, une telle quartique se présente manifestement comme étant la projection d'une biquadratique gauche. Si l'on considère, en effet, la quartique située dans le plan de cote  $z_0$  et si l'on pose

$$xy = t ,$$

la quartique considérée n'est autre que la projection de la biquadratique gauche, intersection du parabolôïde hyperbolique représenté par cette dernière équation en  $x$ ,  $y$  et  $t$  par une autre quadrique dont l'équation est moins simple. De la connaissance d'une solution particulière du problème il est donc possible de déduire une infinité de nouvelles solutions, comme application de la théorie des fonctions elliptiques.

(A suivre)