NOTE SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE ET DU TÉTRAÈDRE

Autor(en): **Daniëls, M.-Fr.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1917)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-17325

NOTE SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE ET DU TÉTRAÈDRE

PAR

M.-Fr. Daniëls (Fribourg, Suisse).

Nous développons dans cette note quelques théorèmes bien simples, échappés à ce qu'il paraît à l'attention des géomètres qui se sont occupés de la géométrie du triangle et du tétraèdre.

1. — *Lorsque aux droites sphériques ou grands cercles* $p_i (i = 1, 2, 3)$ *qui relient un point quelconque* $P(\mathfrak{r}_0)$ *de la surface sphérique aux sommets* $A_i(\mathfrak{r}_i)$ *d'un triangle sphérique on élève en* P *même des normales* q_i, *ces nouvelles droites sphériques coupent les côtés correspondants du triangle en trois points* Q_i *qui sont collinéaires.*

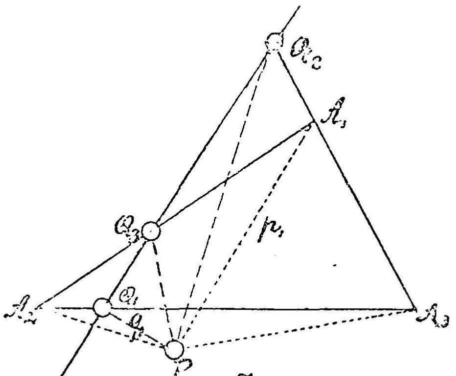

Fig 1

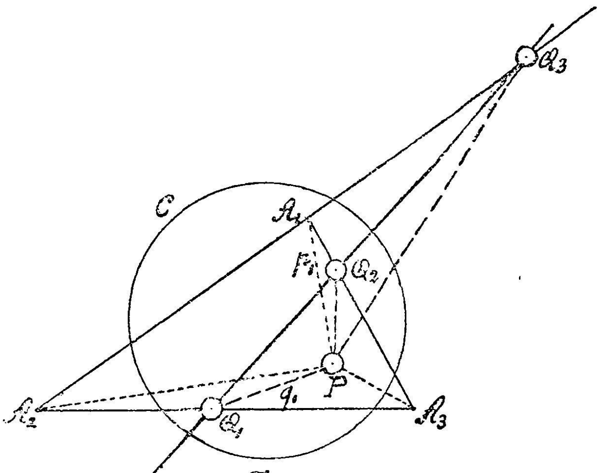

Fig 2.

On peut remplacer la surface sphérique par un plan (fig. 1), et les normales q_i par des droites conjuguées aux p_i par rapport à une conique C sphérique ou plane (fig. 2).

Ce théorème est une conséquence immédiate de l'identité vectorielle :

$$V\mathfrak{l}_1, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 + V\mathfrak{l}_2, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_1 + V\mathfrak{l}_3, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2 \equiv 0$$

où, pour plus de simplicité, les virgules remplacent encore des V, signes de la multiplication vectorielle ou externe. En effet, nous trouvons, si les P_i sont les vecteurs des côtés du triangle, successivement pour le premier sommet A_1, pour la droite p_1, pour la normale q_1 passant par P, et pour son point d'intersection Q_1 avec le premier côté les vecteurs suivants[1] :

$$A_1 \equiv V\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 \ , \quad p_1 \equiv V\mathfrak{r}, \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 \ , \quad q_1 \equiv V\mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3$$

$$Q_1 \equiv V\mathfrak{l}_1, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 \ .$$

Ce dernier point[2] donnant avec les deux autres qui s'en déduisent par permutation cyclique des indices une somme qui est identiquement nulle, les trois points Q_i sont bien colinéaires, c. q. f. d.

2. — *Lorsque aux droites* p_i *qui relient un point quelconque de l'espace* P *aux sommets* A_i *d'un triangle plan, on construit au point* P *même des plans normaux* π_i, *ces nouveaux plans coupent les côtés correspondants du triangle en trois points* Q_i *qui sont collinéaires.*

On peut remplacer les plans normaux π_i par des plans conjugués aux droites p_i par rapport à une quadrique.

Pour démontrer ce théorème on peut se servir avec avantage des méthodes de Grassmann. En effet, on a successivement pour la droite p_1, pour la droite conjuguée p'_1, pour le plan π_1 passant par cette dernière droite et le point P, enfin pour l'intersection Q_1 de ce plan avec le premier côté du triangle

$$p_1 \equiv [A_1 P] \ , \quad p'_1 \equiv | [A_1 P] \ , \quad \pi_1 \equiv [P \ | A_1 P]$$

$$Q_1 \equiv [A_2 A_3 \ P \ | A_1 P] = (A_3 P \,|\, A_1 P) A_2 - (A_2 P \,|\, A_1 P) A_3 \ .$$

Or ce dernier point, donnant avec les deux autres, qu'on en déduit par permutation cyclique une somme qui est iden-

---

[1] Voir *l'Enseignement Mathématique,* VII, nº 3 : *Les coordonnées projectives sur la sphère* ou *Essai de géométrie sphérique,* Fribourg 1907.

[2] En développant on trouve

$$V\mathfrak{r}, \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 = (\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{l}_3)\mathfrak{l}_2 - (\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{l}_2)\mathfrak{l}_3 \ ; \quad V\mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 = (\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{l}_3) \ V\mathfrak{r}\mathfrak{l}_2 - (\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{l}_2) V\mathfrak{r}\mathfrak{l}_3$$

$$V\mathfrak{l}_1, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 = [(\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{l}_3)(\mathfrak{l}_1\cdot\mathfrak{l}_2) - (\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{l}_2)(\mathfrak{l}_1\cdot\mathfrak{l}_3)]\mathfrak{r} + (\mathfrak{l}_1\cdot\mathfrak{r})(\mathfrak{l}_2\cdot\mathfrak{r})\mathfrak{r}_3 - (\mathfrak{l}_1\cdot\mathfrak{r})(\mathfrak{l}_3\cdot\mathfrak{r})\mathfrak{r}_2 \ .$$

tiquement nulle, les trois points Q_i sont bien collinéaires. C. q. f. d.

On arrive à une autre démonstration de ce théorème, dont le premier constitue, au moins pour le plan, un cas spécial, en prenant le point P comme centre d'une sphère et en considérant avec le triangle sphérique produit par les droites PA_i le trialatère polaire produit par les plans π_i. Nous nous proposons de revenir dans une note ultérieure sur certains théorèmes similaires, où le point est remplacé par une droite quelconque ou un plan quelconque.

3. — *Lorsqu'aux droites* p_i *qui relient un point quelconque* P *aux sommets* $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$ *d'un tétraèdre, on construit au point* P *même les plans normaux* π_i, *ces nouveaux plans coupent les faces correspondantes du tétraèdre selon quatre droites* q_i, *génératrices d'un hyperboloïde.*

Au lieu des plans normaux π_i on peut prendre des plans conjugués aux droites p_i par rapport à une quadrique.

Ici encore les méthodes de Grassmann fournissent une démonstration bien simple. On trouve, en effet, successivement pour la droite p_1, pour la droite conjuguée p'_1, pour le plan π_1 et pour son intersection q_1 avec la première face du tétraèdre :

$$p_1 \equiv [A_1 P] \;, \quad p'_1 \equiv | \, [A_1 P] \;, \quad \pi_1 \equiv [P \,|\, A_1 P]$$

$$q_1 \equiv [A_2 A_3 A_4 \quad P \,|\, A_1 P] \;.$$

Or cette droite et les trois autres qui s'en déduisent par permutation cyclique des indices peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}
&(A_1 P \,|\, A_2 P)[A_3 A_4] + (A_1 P \,|\, A_3 P)[A_4 A_2] + (A_1 P \,|\, A_4 P)[A_2 A_3] \\
-\, &(A_2 P \,|\, A_3 P)[A_4 A_1] - (A_2 P \,|\, A_4 P)[A_1 A_3] - (A_2 P \,|\, A_1 P)[A_3 A_4] \\
&(A_3 P \,|\, A_4 P)[A_1 A_2] + (A_3 P \,|\, A_1 P)[A_2 A_4] + (A_3 P \,|\, A_2 P)[A_4 A_1] \\
-\, &(A_4 P \,|\, A_1 P)[A_2 A_3] - (A_4 P \,|\, A_2 P)[A_3 A_1] - (A_4 P \,|\, A_3 P)[A_1 A_2] \;.
\end{aligned}$$

Leur somme est nulle ; les quatre droites sont donc des génératrices d'un hyperboloïde.

Fribourg, le 30 septembre 1917.