valeurs quelconques de p et a. Aussi n'avons-nous pas démontré par induction que ce qui a lieu pour quelques valeurs de p et a serait aussi le cas pour des valeurs plus considérables.

A mon avis le cas traité est exceptionnel, et ne permet pas ces preuves ordinaires. En vérité, il me semble suffire que nous soyons à même d'éprouver l'exactitude de la loi que nous venons d'énoncer pour autant de nombres premiers que nous voulons, et de savoir que, dans autant de cas, notre exposition sera juste.

Copenhague, le 1er juillet 1916.

SUR UNE TRANSFORMATION PROJECTIVE CONDUISANT A QUELQUES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES

PAR

F. GONSETH (Zurich).

I

1. — Dans un plan non-euclidien, nous allons supposer que la conique absolue soit réciproque de celle du plan euclidien, c'est-à-dire qu'elle se réduise à deux droites. Nous examinerons ensuite la métrique de ce plan avec un œil euclidien.

Aux notions *d'angle de deux droites*, de *distance d'un point à une droite*, et *de distance de deux points* vont correspondre les notions au sens non-euclidien de distance de deux points, de distance d'une droite à un point, et d'angle de deux droites.

2. — Supposons que la conique absolue de ce plan soit formée des deux droites isotropes de l'origine

$$x^2 + y^2 = 0 \ .$$

Pour passer des premières notions précitées aux secondes, il suffit de remplacer dans les formules usuelles les coordonnées (x, y) d'un point, par celles (u, v) d'une droite; et l'équation des points cycliques

$$u^2 + v^2 = 0$$

par celle des droites isotropes de l'origine

$$x^2 + y^2 = 0 \ .$$

3. — Le plan non-euclidien à étudier se déduit du plan euclidien par une simple *polarité* suivant le cercle imaginaire

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

ou par une *antipolarité* suivant le cercle de rayon unité. Le centre de ce cercle sera dit aussi *centre de la transformation*.

4. — *La distance* non-euclidienne de deux points P_1, P_2 est évidemment égale à *l'angle* des rayons OP_1 et OP_2.

La distance D d'une droite d, de coordonnées (u, v) à un point $P(x . y)$ est donnée par la formule suivante :

$$D = \frac{ux + vy + 1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{ux + vy + 1}{(u^2 + v^2)^{1/2}} \cdot \frac{(u^2 + v^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2)^{1/2}} .$$

Cette distance est donc égale au quotient de la distance euclidienne δ de P à d, par le produit des distances euclidiennes r de O à P, et p de O à d.

$$D = \frac{\delta}{r \cdot p} .$$

L'angle Φ de deux droites d_1, d_2, de coordonnées (u_1, u_2) et (v_1, v_2) (correspondant à la distance de deux points du plan euclidien) s'obtient comme suit :

Soit R le point d'intersection de d_1 et d_2 ; une perpendiculaire en O sur OR les coupe en M_1 et M_2.

Or :

$$\overline{OR} = \frac{\sqrt{(v_1 - v_2)^2 + (u_1 - u_2)^2}}{u_1 v_2 - u_2 v_1} ,$$

$$\operatorname{tg} \widehat{ORM_1} = \frac{u_1 v_2 - v_1 u_2}{u_1^2 + v_1^2 - u_1 u_2 - v_1 v_2} .$$

D'où il résulte :

$$\Phi = \frac{1}{OM_1} - \frac{1}{OM_2} .$$

II

5. — Nous appliquons tout d'abord cette transformation au cas le plus simple possible ; les propriétés les plus connues des coniques vont se trouver être les transformées de propriétés immédiates du cercle.

Un cercle, C, passe par les points cycliques ; sa courbe correspondante sera donc une conique γ touchant les isotropes du point O ; une conique dont O est par conséquent un foyer. O ayant été