Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 19 (1917)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UNE TRANSFORMATION PROJEGTIVE CONDUISANT A QUELQUES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES

Autor: Gonseth, F.

Kapitel: III

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-17329

Ayant choisi deux points fixes sur une conique, et les ayant projetés depuis un point mobile, soient N_1 *et* N_2, *les points où les rayons projetants coupent l'une et l'autre directrices du point* O ; *l'angle* N_1ON_2 *est constant,*

et l'énoncé *d')* par exemple :

Le produit $\frac{\rho}{d_1} \cdot \frac{\rho}{d_2}$ *(où* ρ *est la distance d'un point arbitraire de la courbe au point* O ; d_1 *et* d_2 *les distances aux directrices de* O), *est une constante.*

Si O est un foyer, ses directrices coïncident; et l'on retrouve l'énoncé *b')*.

9. — Plus généralement, transformons l'ensemble des courbes de $n^{\text{ième}}$ classe ayant les mêmes foyers qu'une courbe donnée $\boldsymbol{\Gamma}_n$. Les courbes transformées sont du $n^{\text{ième}}$ ordre et forment un système linéaire ponctuel. Parmi elles se trouve une courbe comprenant n droites réelles. Ces n droites seront les *n directrices réelles* du point O, suivant C_n, la transformée de $\boldsymbol{\Gamma}_n$.

Et les deux énoncés suivants de Laguerre :

Les n *tangentes menées à* $\boldsymbol{\Gamma}_n$ *depuis un point quelconque ont même orientation que le groupe des* n *droites allant aux foyers réels de* $\boldsymbol{\Gamma}_n$; et

Les mn *tangentes communes à deux courbes* $\boldsymbol{\Gamma}_m$ *et* $\boldsymbol{\Gamma}_n$ *ont même orientation que le groupe des* mn *droites joignant tous les foyers réels de* $\boldsymbol{\Gamma}_m$ *à tous les foyers réels de* $\boldsymbol{\Gamma}_n$

prennent la forme suivante :

Les n *points d'intersection d'une droite arbitraire avec une courbe* C_n *d'une part, et les* n *directrices d'un point quelconque* O *d'autre part sont projetées depuis* O *par deux groupes de rayons ayant même orientation.*

Les mn *points d'intersection de deux courbes* C_m *et* C_n *sont projetées depuis un point arbitraire* O *suivant* mn *droites ayant même orientation que le groupe des* mn *droites projetant les* mn *intersections de toutes les directrices du point* O *suivant* C_m *avec toutes les directrices du même point suivant* C_n.

On pourrait aisément multiplier les exemples. En règle générale toute propriété métrique se transforme en une nouvelle, d'essence plus générale, si le centre de la transformation ne prend pas quelque position spéciale.

III

10. — On peut opérer une transformation semblable dans l'espace. L'espace transformé peut être considéré comme *non-euclidien*, avec la *quadrique absolue*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \ .$$

On le déduit de l'espace euclidien par *polarité* suivant la sphère imaginaire

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0 ,$$

ou par *antipolarité* suivant une sphère de rayon unité.

11. — On vérifiera que les notions habituelles sont à remplacer comme suit :

L'angle de deux plans par *l'angle des rayons* projetant les points transformés depuis le centre O de la transformation.

La *distance* D *d'un point à un plan* par le quotient de la distance δ du plan transformé π au point transformé P par le produit de la distance ϱ de O à P, et de la distance p de O à π

$$D = \frac{\delta}{\rho \cdot p} .$$

La distance de deux points par l'expression

$$\frac{1}{OM_1} - \frac{1}{OM_2} ,$$

où les points M_1 et M_2 sont définis comme suit : Soient π_1 et π_2 les deux plans transformés, et r leur droite d'intersection ; la perpendiculaire en O sur le plan (O, r) coupe π_1 en M_1 et π_2 en M_2.

La plus courte distance de deux droites par

$$\frac{1}{ON_1} - \frac{1}{ON_2} ,$$

où les points N_1 et N_2 sont les intersections des droites transformées avec leur transversale commune passant par O.

L'angle de deux droites, enfin, par *l'angle des plans* projetant les transformées depuis O.

12. — Transformons, par exemple, un faisceau de quadriques homofocales. Ceci nous conduira à décrire une quadrique, *telle qu'on la voit depuis un point arbitraire*, O. Mettons encore en regard les propriétés en question et celles auxquelles elles correspondent :

Le lieu des sommets des cônes de révolution tangents à une quadrique F se compose de trois coniques, les focales de la quadrique.	Les plans qui coupent une quadrique Φ suivant des coniques telles qu'elles soient projetées depuis un point O par des cônes de révolution enveloppent trois cônes que nous nommerons les *cônes focaux du point* O.
Deux de ces focales sont tou-	Deux de ces cônes sont tou-

jours réelles, la troisième est imaginaire.

Les plans de ces coniques sont les plans principaux de la quadrique F.

Les focales réelles d'un ellipsoïde ou d'un hyperboloïde sont une ellipse et une hyperbole.

Les focales réelles d'un paraboloïde sont deux paraboles.

jours réels, le troisième est imaginaire.

Le point O est le sommet d'un trièdre trirectangle conjugué à la quadrique Φ. Les sommets de ces cônes sont à l'intersection des arêtes de ce trièdre avec le plan polaire de O.

Si le point O est à l'extérieur ou à l'intérieur de Φ, il se trouve à l'intérieur de l'un et à l'extérieur de l'autre cône réel.

Si O est sur Φ, les deux cônes passent par ce point.

Une *section circulaire* de F est transformée en un cône tangent à Φ dont un *axe* passe par O. Par conséquent le lieu des sommets de pareils cônes se compose de six droites passant par O, dont il serait facile de préciser la position et les conditions de réalité. En particulier, les plans tangents à Φ aux points où ces droites coupent cette quadrique seront les *plans ombilicaux* du point O. On a encore

Toutes les quadriques ayant mêmes focales forment un faisceau homofocal.

Les focales sont aussi le lieu des ombilics des quadriques homofocales.

Toutes les quadriques suivant lesquelles les cônes focaux du point O sont les mêmes que suivant Φ, forment un faisceau ponctuel, défini par la quadrique Φ, et par la sphère point O.

Les cônes focaux de O sont aussi l'enveloppe des plans ombilicaux du même point pour les quadriques du faisceau qui vient d'être défini.

Jusqu'ici ne sont guère intervenues que des relations d'*angles* (à côté de propriétés polaires) qu'on retrouverait par une transformation du même système homofocal par polarité suivant une sphère arbitraire de centre O. Pour introduire d'autres grandeurs, partons des énoncés suivants dus à Reye[1], en même temps qu'à d'autres auteurs[2].

Un ensemble de points pesants (de masses positives ou négatives) étant donné, les plans pour lesquels le moment quadratique (d'inertie) de cet ensemble est une constante donnée, enveloppent

---

[1] Reye, *Journal für Mathem.*, 72 (1870).
[2] Par exemple Binet, *Journal de l'Ecole polyt.*, 16.

une quadrique ; lorsque la constante varie, la quadrique décrit un faisceau homofocal. Soit F, en particulier, la quadrique correspondant à la valeur O. On peut remplacer tout le système pesant par quatre masses disposées aux sommets d'un tétraèdre polaire arbitraire de F.

Si la masse qu'on veut disposer en un de ces sommets est donnée d'avance, ce dernier peut être choisi arbitrairement sur une quadrique F′, ayant même cône asymptotique que F.

Il suffira de remplacer partout la distance d'un point du système pesant à un plan arbitraire par l'expression $\frac{\delta}{\rho \cdot p}$, où les lettres ont la signification donnée au nº 11.

Par commodité nommons *moment relatif au point* O, d'un point pesant à un plan, ou d'un plan massif à un point, l'expression ainsi transformée des moments habituels. Les p sont d'ailleurs dans ce cas des constantes. Les énoncés cités deviennent alors :

Un ensemble de plans massifs étant donné (de masses positives ou négatives), le lieu des points pour lesquels le moment, quadratique et relatif au point O, du système est une constante, est une quadrique Φ. Lorsque la constante varie, la quadrique décrit un faisceau ponctuel, contenant la sphère point O. On peut remplacer le système de plans massifs par quatre plans massifs, formant un tétraèdre polaire, d'ailleurs arbitraire, de Φ.

Si la masse d'un de ces quatre plans est donnée d'avance, il peut être choisi quelconque, parmi les plans tangents à une certaine quadrique qui touche Φ en tous les points de contact de ses tangentes menées de O.

13. — Comme dernière application enfin, considérons deux surfaces, l'une de $n^{\text{ième}}$ ordre F_n, l'autre de $n^{\text{ième}}$ classe Φ_n, qui soient *apolaires*. Nous définirons, avec Reye[1], la surface Φ_n comme suit : Elle est l'enveloppe des plans pour lesquels la somme des moments du $n^{\text{ième}}$ ordre d'un système de points pesants est nulle ; cet ensemble de points est un *système définissant de* Φ_n. F_n sera déterminée, semblablement, par un système de plans massifs. Et maintenant l'énoncé suivant[2] est juste :

F_n *et* Φ_n *sont apolaires quand le moment mixte de tout système définissant* F_n, *par rapport à tout système définissant* Φ_n, *est nul.* (Le moment mixte d'un point P de masse m et d'un plan π de masse μ, δ étant la distance P à π, vaut naturellement $m \mu \delta^n$.)

Ces définitions et ce dernier énoncé valent encore lorsque δ est partout remplacé par $\frac{\delta}{\rho \cdot p}$, c'est-à-dire *lorsque les moments habituels sont remplacés par les moments relatifs à un point arbitraire.*

---

[1] Reye, *Journ. für Mathem.*, 78 (1874).

[2] Cet énoncé ne se trouve pas dans le travail cité de Reye. Il en est une conséquence assez naturelle.

14. — *Remarque.* Nous avons supposé la conique absolue de notre plan non-euclidien formée des deux droites isotropes du point O; et dans l'espace la quadrique absolue était le cône isotrope de ce même point. On aurait pu naturellement faire toute autre supposition : par exemple la conique se composera de deux droites rectangulaires par O. Au lieu de trouver les propriétés des foyers des coniques, on en trouvera d'autres qui vaudront pour tout point des coniques orthoptiques de ces dernières. Et dans l'espace la sphère orthoptique d'une quadrique s'introduira, si l'absolu est un cône équilatère.

Les propriétés trouvées sont moins simples que celles qui sont décrites plus haut et d'ailleurs faciles à établir.

SUR LA FONCTION RÉSISTANCE F(v) DE LA BALISTIQUE

PAR

G. Tiercy (Genève).

---

1. — On sait que le problème physique, qui consiste à chercher la trajectoire d'un projectile pesant dans l'atmosphère terrestre, est hérissé de difficultés; si on le considère tel qu'il se présente, dans toute sa compléxité, il est inabordable dans l'état actuel de la science.

Même en le simplifiant par l'abandon des termes secondaires des perturbations dues à l'atmosphère ou au projectile lui-même, c'est-à-dire même en ne considérant que le problème balistique principal[1], on se heurte d'emblée à une difficulté considérable provenant de l'ignorance complète, où l'on se trouve, de la forme analytique de la fonction « résistance » de l'air.

L'étude théorique des lois de cette résistance est extrêmement en retard, comparée à leur étude expérimentale; cette dernière a été poussée très loin par les artilleurs, car il leur était nécessaire de connaître les valeurs numériques de la résistance atmosphérique; leurs expériences ont révélé les trois lois suivantes :

---

[1] Mouvement dans un milieu résistant, homogène, immobile, d'un point matériel pesant soumis à l'action : 1° de la gravité, force toujours constante et parallèle, 2° de la résistance de l'air, force toujours tangentielle.