Sur la définition géométrique de la « Fenêtre de Viviani ».

Autor(en): **Tiercy, G.**

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1917)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sur la définition géométrique de la « Fenêtre de Viviani ».

Dans les cours de géométrie, on présente généralement la courbe de Viviani comme intersection de deux surfaces de révolution : une sphère de rayon r, et un cylindre de rayon $\left(\frac{r}{2}\right)$ tangent intérieurement à la sphère; c'est la définition géométrique la plus simple.

Remarquons que la courbe peut être dessinée sur une infinité de surfaces de révolution du deuxième degré, issues d'une combinaison linéaire de la sphère et du cylindre primitifs.

Soit (s) la sphère, dont le centre est à l'origine :

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \; ; \qquad (s)$$

et soit (c) le cylindre tangent intérieurement, de rayon $\left(\frac{r}{2}\right)$, et d'axe parallèle à l'axe des z :

$$x^2 + y^2 - rx = 0 \; . \qquad (c)$$

Les coordonnées d'un point quelconque de la courbe satisferont à toute équation résultant de la combinaison suivante :

$$(c) + (s) . [f(x, y, z)] = 0 \; ,$$

où $f(x, y, z)$ est une fonction quelconque, finie tout le long de la courbe.

Un cas particulièrement intéressant est celui où la fonction $f(x, y, z)$ se réduit à une constante k :

$$(c) + k(s) = 0 \; . \qquad (1)$$

On obtient l'équation :

$$x^2 + y^2 - rx + k(x^2 + y^2 + z^2 - r^2) = 0 \; , \qquad (2)$$

qu'on peut écrire sous la forme :

$$\frac{\left[x - \frac{r}{2(1+k)}\right]^2}{\left[\frac{r(1+2k)}{2(1+k)}\right]^2} + \frac{y^2}{\left[\frac{r(1+2k)}{2(1+k)}\right]^2} + \frac{z^2}{\left[\frac{r(1+2k)}{2(1+k)}\right]^2 \cdot \frac{1+k}{k}} = 1 . \qquad (3)$$

Sauf dans les cas où le discriminant de cette équation est nul, cette quadrique (3) est visiblement une surface de révolution, dont le centre est sur l'axe des x, à une distance de l'origine égale à :

$$\xi = \frac{r}{2(1+k)} .$$

Donc : *Toutes les quadriques à discriminant non nul qui contiennent la courbe de Viviani sont des quadriques de révolution, issues de la combinaison* (1). Les demi-axes sont les valeurs :

$$A_1 = \frac{r(1+2k)}{2(1+k)} ; \qquad A_2 = \frac{r(1+2k)}{2(1+k)} \cdot \sqrt{\frac{1+k}{k}} = \frac{r(1+2k)}{2\sqrt{k(1+k)}} .$$

On en tire :

$$A_1^2(k+1) = kA_2^2 , \qquad k = \frac{A_1^2}{A_1^2 - A_2^2} ;$$

et portant cette valeur de k dans l'expression de A_1, on obtient :

$$r(A_1^2 + A_2^2) = 2A_1A_2^2 ; \qquad (4)$$

c'est là la condition que doivent vérifier les axes d'une quadrique de révolution, dont l'axe de rotation est celui des z, pour que cette quadrique contienne la courbe envisagée. On voit immédiatement, d'après (4), qu'il faut écarter les hyperboloïdes à deux nappes.

On remarquera d'ailleurs que les trois valeurs de k qui annulent le discriminant sont :

$$k = -1 , \qquad k = -\frac{1}{2} , \qquad k = 0 ;$$

elles correspondent respectivement à un cylindre parabolique, à un cône de révolution dont l'axe est la génératrice du cylindre (c) tangente à la sphère (s), et au cylindre (c) lui-même.

On établira aisément le tableau suivant :

k	Axe A_1 dans le plan xy	Axe A_2 de rotation	
$k = -\infty$	r	r	Sphère (équation s).
$-\infty < k < -1$	$r < A_1 < \infty$	$r < A_2 < \infty$	Ellipsoïde aplati ($A_2 < A_1$).
$k = -1$	∞	∞	Cylindre parabolique $z^2 + rx - r^2 = 0$.
$-1 < k < -\frac{1}{2}$	$\infty > A_1 > 0$	imaginaire	Hyperboloïde à 1 nappe.
$k = -\frac{1}{2}$	0	0	Cône de révolution.
$-\frac{1}{2} < k < 0$	$0 < A_1 < \frac{r}{2}$	imaginaire	Hyperboloïde à 1 nappe.
$k = 0$	$\frac{r}{2}$	∞	Cylindre (équation c).
$0 < k < \infty$	$\frac{r}{2} < A_1 < r$	$\infty > A_2 > r$	Ellipsoïde allongé ($A_2 > A_1$).
$k = +\infty$	r	r	Sphère s.

Et l'on voit que, dans cette famille de quadriques contenant la courbe en question, le cas de ($k = -1$) seul ne correspond pas à une surface de révolution.

G. TIERCY (Genève).

Sur l'équation $x^2 - Ay^2 = 1$.

L'étude de l'équation

$$x^2 - Ay^2 = +1 \tag{1}$$

a déjà passionné plus de trois cents auteurs, et l'on connaît les Tables de Legendre, Bickmore et Whitford ! [1]

La recherche pratique de la solution minima était faite jusqu'à présent sur les fractions continues, ce qui demande en général beaucoup de soins et de temps.

J'ai maintenant complètement établi une méthode nouvelle, donnant à l'aide de mes procédés mécaniques et même parfois à simple vue une valeur très petite pour une inconnue auxiliaire,

[1] Ce dernier volume a été annoncé dans l'*E. M.* en 1912 par M. A. Aubry.