

Leibniz s'est-il occupé du problème de Fermat?

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1918)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Voici ce passage de la lettre de MERSENNE à TORRICELLI¹ :
 « Clarissimus geometra, Senator Tholosanus Fermatius,
 « tibi (per me), sequens problema solvendum proponit, quod
 « tuo de conoideo acuto infinito æquivaleat. Invenire trian-
 « gulum rectangulum in numeris, cujus latus majus sit qua-
 « dratum, summaque duorum aliorum laterum etiam sit
 « quadratum, denique summa majoris et medii lateris sit
 « etiam quadratum.

« Exempli gratia : in triangulo 5, 4, 3 oportet 5 esse
 « numerum quadratum; deinde summa 4 et 3, hoc est 7,
 « foret quadratus numerus, denique summa 5 et 4, hoc est 9,
 « esset quadrata. »

Il est ainsi parfaitement établi que, dès le début de l'année 1644, l'attention de TORRICELLI avait été, au moins par l'intermédiaire de MERSENNE, appelée sur le problème de FERMAT.

Leibniz s'est-il occupé du problème de Fermat?

6. — Avant de pousser plus loin l'examen de cette question tout spécialement intéressante, je désire ouvrir une parenthèse sur un autre point de l'histoire de ce même problème et précisément encore sur la transmission de son énoncé aux contemporains de FERMAT.

L. EULER, à qui l'on doit plusieurs mémoires sur la question et qui a le second (après BILLY) publié une démonstration précise du résultat simplement énoncé par FERMAT, attribue ce problème à LEIBNIZ, dans une première pièce datée du 15 novembre 1775² : « Hoc problema, a LEIBNIZIO
 « olim propositum, eo magis est notatu dignum, quod mi-
 « nimi numeri sint vehementer grandi, siquidem positivi
 « desiderentur... »

Puis, dans une seconde pièce du 18 mai 1780³, il l'attribue

¹ *Discepoli di Galileo*, t. XLI, f° 9, recto.

Œuvres de Fermat, t. IV, Paris, 1912, p. 82-83.

Voir aussi la lettre de TORRICELLI à CARCAVI du 8 juillet 1646 (*Œuvres de Fermat*, t. IV, p. 88).

² *Miscellanea analytica* [*Commentationes arithmeticae*, t. II éd. 1849, pp. 44-52], et *Opuscula analytica*, Petropoli, t. I. 1783, p. 335.

³ De tribus pluribusve numeris inveniendis, quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa biquadratum (18 mai 1780). *Commentationes arithmeticae*, édition de 1849, t. 2, p. 397-402.

à FERMAT : « Celebre est et nuper ab illustri LAGRANGE singulari studio pertractum problema a FERMATIO olim propositum... » Une autre pièce de la même époque¹ attribue encore et très nettement ce problème à FERMAT.

7. — En raison de l'intérêt tout spécial qui s'attache à tout ce qui se rapporte à d'aussi grands noms, j'ai recherché des traces d'une pareille étude dans l'œuvre immense de LEIBNIZ.

La question de priorité entre LEIBNIZ et le géomètre de Toulouse ne se pose nullement, puisque l'énoncé du problème fut rendu public dès 1643, c'est-à-dire trois ans avant la naissance de LEIBNIZ. Il est même douteux que LEIBNIZ, qui n'avait pas atteint sa vingtième année à la mort de FERMAT — (naissance de LEIBNIZ : 1646; mort de FERMAT : 1665) — ait pu s'occuper de la question du vivant de celui-ci.

8. — Il s'agit seulement de savoir si LEIBNIZ, à une date quelconque de son existence, a pu apporter une contribution plus ou moins importante à la résolution de ce problème.

Reprenons la solution du problème de FERMAT. A un facteur carré près, l'arithmotriangle pythagorique peut être représenté par les équations

$$a = 1, \quad b = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad c = \frac{2t}{1 + t^2},$$

dans laquelle t désigne un nombre rationnel; ce nombre est assujéti à vérifier tout d'abord la double inégalité,

$$0 < t < 1,$$

¹ Solutio problematis Fermatiani de duobus numeris, quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa biquadratum, ad mentem Ill. Lagrange adornata (5 juin 1780). *Commentationes arithmeticae*, édition de 1849, pp. 403-405.

A ces références d'EULER, il convient d'ajouter une courte note des *Opera postuma* (Petroli, t. I, 1862, p. 221) dans laquelle EULER établit l'équivalence des équations :

$$2x^4 - y^4 = \square, \quad 8p^4 + q^4 = \square.$$

Ces équations ne sont autres que celles que forme LAGRANGE dans son étude du problème de Fermat. (Sur quelques problèmes de l'Analyse de Diophante citée plus loin.) Voir aussi au sujet de ces équations :

M. LEBESGUE. Résolution des équations biquadratiques

$$z^2 = x^4 \pm 2^m y^4, \quad z^2 = 2^m x^4 - y^4, \quad 2z^2 = x^4 \pm y^4;$$

Journal de Mathématiques pures et appliquées (de Liouville), [1], t. XVIII, 1853, p. 73-86. Edouard LUCAS a étudié les équations de cette forme dans ses *Recherches sur l'analyse indéterminée et l'arithmétique de Diophante*.

Le problème de Fermat est résolu dans cet ouvrage de Ed. LUCAS.

assurant les signes positifs des mesures des cathètes et à satisfaire d'autre part à l'équation qui traduit la condition imposée $b + c = \square$. Cette équation est une équation de BRAHMAGUPTA-FERMAT du quatrième ordre :

$$(1 + t^2)(1 + 2t - t^2) = \square .$$

Si le second membre est pris égal au carré de l'expression

$$1 + t - \frac{\lambda}{2}t^2 ,$$

dans laquelle λ est une indéterminée rationnelle, cette équation devient

$$(\lambda^2 + 4)t^2 - 4(\lambda + 2)t - 4(\lambda - 1) = 0 ,$$

et la condition de rationalité de t est alors :

$$\lambda^3 + 8\lambda = \square .$$

Telle est la forme canonique à laquelle peut être réduite l'équation indéterminée dont dépend le problème de FERMAT.

Le problème de FERMAT est donc réductible à l'étude arithmogéométrique d'une cubique harmonique dont les invariants sont :

$$g_2 = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad g_3 = 0 .$$

Les conditions d'inégalité imposées à t entraînent la condition suivante pour λ : ce nombre rationnel doit être ou bien compris dans l'intervalle $0 < \lambda < 1$ ou bien supérieur à 8. Sinon, c'est-à-dire si λ est compris entre l'unité et huit, car il ne saurait être négatif en vertu même de l'équation

$$\lambda^3 + 8\lambda = \square ,$$

la solution de celle-ci correspond non plus au problème de FERMAT, mais au problème pour lequel la différence et non la somme des cathètes est un nombre carré. C'est ce qui se produit pour $\lambda = 1$ ou encore pour $\lambda = \frac{49}{36}$, cas auxquels correspond un véritable triangle $t = \frac{12}{5}$ de côtés 169, 120 et 119.

9. — Ainsi donc, le problème de FERMAT dépend analytiquement d'une équation indéterminée qui peut aussi être mise sous la forme :

$$\lambda + \frac{8}{\lambda} = \square .$$

Or il se trouve que LEIBNIZ a rencontré ce genre d'équations,

$$x + \frac{a}{x} = \square ,$$

où figure un nombre rationnel a (sans rapport avec l'hypoténuse de l'arithmotriangle pythagorique considéré plus haut); il reste trace de ces recherches de LEIBNIZ dans les deux pièces suivantes :

a) *Invenire triangulum rectangulum in numeris cujus area sit quadratus* (29 décembre 1678), *Leibnizens mathematische Schriften*, Gerhardt, [2], III, 1863, p. 120-125.

b) *Exercitium ad promovendam scientiam numerorum*, *ibid.*, [2], III, 1863, p. 114-119.

Dans la première de ces pièces, il est question de l'équation particulière :

$$x - \frac{1}{x} = \square ;$$

tandis que dans la seconde il s'agit de l'équation générale :

$$x + \frac{a}{x} = \square .$$

C'est la seule trace d'un travail de LEIBNIZ sur ce sujet que j'aie pu jusqu'ici retrouver. La question reste donc posée.

L'origine probable du problème de Torricelli.

10. — Revenons à TORRICELLI et à son problème retrouvé par M. Gino LORIA.

La solution donnée par FERMAT lui-même, retrouvée par BILLY et par EULER

$$a = 4\ 687\ 298\ 610\ 289 ,$$

$$b = 4\ 565\ 486\ 027\ 761 ,$$

$$c = 1\ 061\ 652\ 293\ 520 ,$$